# 線形代数テスト 1a

樋口さぶろお[1]　配布: 2019-05-28 火　更新: Time-stamp: "2019-07-26 Fri 10:39 JST hig"

## テスト 1a 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

## 1

**結果のみ, 過程不要**

次の積のうち, 定義されないものに「×」, 定義されるものには, 型を「2 行 3 列」のように答えよう (行の個数は縦方向のサイズ, 列の個数は横方向のサイズ).

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$
2. ${}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

## 2

**結果のみ, 過程不要**

次のうち, 任意の 2 次の正則行列 $A, B$ に対して成立するものに○, そうでないものに×をつけよう.

1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
2. $B(AB)^{-1}A = E$
3. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
4. ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B$
5. ${}^{\mathrm{t}}(A+B) = {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B$


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

## 3

**結果のみ, 過程不要**

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ の固有値 $\lambda_1 = 3$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, 固有値 $\lambda_2 = 4$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ である.

1. 関係 $P^{-1}AP = \Lambda$ が成立するような対角行列 $\Lambda$, 正則行列 $P$ を 1 組答えよう.
2. 関係 $QA = DQ$ が成立するような対角行列 $D$, 正則行列 $Q$ を 1 組答えよう.

## 4

**結果のみ, 過程不要**

行列

$$A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$$

を直交行列 $P$ で対角化して, $P^{-1}AP = \Lambda$ となった. ただし, $b \neq 0$ であり, $P$ は直交行列, $\Lambda$ は対角行列である.

つぎのうち, 直交行列 $P$ としてありうるものが 1 つだけある. それを選ぼう.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$
3. $\frac{1}{2} \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$
4. $\frac{1}{2} \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$
5. $\frac{1}{5} \left[\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right]$

## 5

**結果のみ, 過程不要**

次の行列の積を計算しよう.

$$\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

## 6

**結果のみ, 過程不要**

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ を考える.

1. 行列式 $\det A$ を求めよう.
2. 逆行列 $A^{-1}$ を求めよう.

## 7

**結果のみ，過程不要**

実対称行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ の固有値 $\lambda_1 = -3$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, 固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ である.

関係 ${}^{\mathrm{t}}PAP = \Lambda$ が成立するような対角行列 $\Lambda$, 直交行列 $P$ を 1 組答えよう.

## 8

**結果のみ，過程不要**

平面の線形変換を考える.

1. 原点を中心に角 $\pi/6$ だけ反時計回りに回転する線形変換を表す行列を答えよう.
2. $x$ 軸に関して対称移動する線形変換を表す行列を答えよう.

## 9

**$\boxed{\text{過程も記述すること}}$**

平面の線形変換を考える.
平面上の点に対して,

- まず 行列 $P = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換 $f_1$,
- 次に $D = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換 $f_2$ を $n$ 回 ($n = 0, 1, 2, \ldots$),
- 最後に $f_1$ の逆変換 $f_3$

を, この順番で続けて行う.

1. これら $(n+2)$ 個の線形変換の (この順番での) 合成変換を表す行列を答えよう.
2. この合成変換で, 平面の点 $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$ の写る点を答えよう.

## 10

**$\boxed{\text{過程も記述すること}}$**

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} -8 & 3 \\ -8 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ の固有値と固有ベクトルを求めよう.

龍谷大学 > 理工学部 > 数理情報学科 > 樋口 > 担当科目 > 2019 年 > 線形代数

# 線形代数テスト 1a 略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2019-05-28 火更新: Time-stamp: "2019-07-26 Fri 10:39 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

**配点**　計 100 点.

## 1

1. ×
2. 4 行 3 列
3. 3 行 2 列
4. 1 行 2 列
5. ×

**配点**　1-5:各 2 点, 計 10 点.

## 2

1. × $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. ○ $B(AB)^{-1}A = B(B^{-1}A^{-1})A = (BB^{-1})(A^{-1}A) = E$
3. × $(A+B)^3 = A^3 + (AAB + ABA + BAA) + (ABB + BAB + BBA) + B^3$
4. × ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$
5. ○

**配点**　1-5:各 2 点, 計 10 点.

**講評**　1-4 は授業で扱った公式またはそのストレートな適用.

5 は, 転置の定義から正誤判定できてほしい式.

1-5 について, 知識によらなくても, $A, B$ に適当な正則行列をおいて両辺を計算して, 等しくならなかったら × という確実な判定ができます.

## 3

1. $\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. $P$ の列ベクトルはそれぞれ定数倍されていてもよい. $\Lambda$ と $P$ の列ベクトルの順序は対応する.


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. $QA = DQ$ に右から $Q^{-1}$ をかけて同値変形して得られる $QAQ^{-1} = D$ と $P^{-1}AP = \Lambda$ とを比べると, $Q = P^{-1}, D = \Lambda$ が答の一例.
$D = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right], Q = \frac{1}{1\cdot 3 - 1\cdot 2}\left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right].$

**配点**　1 $\Lambda, P$ :各 3 点, 2 $D, Q$ :各 3 点, 計 12 点.

## 4

2 個の列ベクトルがともに単位ベクトルで, 互いに直交するものを選んで, 1.
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$

**配点**　4 点.

## 5

$\left[\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$

**配点**　5 点.

## 6

1. $\det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 17.$
2. $A^{-1} = \frac{1}{17}\left[\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{smallmatrix}\right].$

**配点**　1,2:各 5 点. 計 10 点.

## 7

長さ $|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{5}$. $\boldsymbol{x}_1$ と平行な単位ベクトル (の一例) は $\boldsymbol{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right].$
長さ $|\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{5}$. $\boldsymbol{x}_2$ と平行な単位ベクトル (の一例) は $\boldsymbol{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right].$
よって, $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right], P = [\boldsymbol{x}_1' \quad \boldsymbol{x}_2'] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. 実際, ${}^{\mathrm{t}}P = P^{-1}$ となっていることがわかる.

**配点**　$\Lambda$:2 点, $P$ :8 点, 計 10 点,

## 8

1. 回転行列の定義から,

$$\begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

2. 

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**配点**　1,2:各 5 点. 計 10 点.

## 9

1. $P^{-1}D^nP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & -2(-3)^n+2^{n+1} \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}$
2. $P^{-1}D^nP\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot 2^n+4(-3)^n \\ -2(-3)^n \end{bmatrix}$

**配点**　1:7 点,2:2 点. 計 9 点.

**講評**　まず $A$ で表す線形変換, 次に $B$ で表す線形変換, を行うとき, 合成変換は $BA$ で表される (Trial L03). 3 個以上でも積の順序は同じようになる.

この行列の積を, ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ にかけることを考えると, まず $P$ とベクトルとの積を最初に計算することになることから, この順序が正しいことがわかる.

## 10

行列 $A$ の固有方程式は

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= 0 \\ \det\begin{bmatrix} -8-\lambda & 3 \\ -8 & 6-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda+6)(\lambda-4) &= 0 \end{aligned}$$

よって, 固有値は $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 4$.

$\lambda_1 = -6$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ とすると, $A\boldsymbol{x}_1 = -6\boldsymbol{x}_1$ より,

$$\begin{aligned} -8u+3v &= -6u \\ -8u+6v &= -6v \end{aligned}$$

よって, $-2u+3v=0$. すなわち, $v=\frac{2}{3}u$, $u$:任意.

固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}_1 = c\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

($\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ のように固有ベクトルのうちの 1 個だけを答えてもよい)

$\lambda_2 = 4$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right]$ とすると, $A\boldsymbol{x}_2 = 4\boldsymbol{x}_2$ より,

$$\begin{aligned} -8u+3v =& 4u \\ -8u+6v =& 4v \end{aligned}$$

よって, $-4u+v=0$. すなわち, $v=4u$, $u$:任意.

固有ベクトルは, $\boldsymbol{x}_2 = c\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

($\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ のように固有ベクトルのうちの 1 個だけを答えてもよい)

**配点**　20 点.