線形代数テスト 2a

樋口さぶろお[1] 配布: 2019-07-23 火 更新: Time-stamp: "2019-07-26 Fri 08:32 JST hig"

テスト 2a 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 過程の要不要は問題ごとの指示に従おう.
4. 行列の成分 0 は, 空白で代用してよい. 行列式の計算や行基本変形では, 複数回の基本変形の結果を 1 つの $=$ や $\to$ で表してよい. 操作 I,II,III の表示は必須でない.

1

結果のみを採点

ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

を考える.

1. 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を求めよう.
2. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求めよう.
3. スカラー 3 重積 $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ を求めよう.
4. ベクトルの 3 個組 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の基底かどうか答えよう.

2

結果のみを採点

変数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対するある連立 1 次方程式の拡大係数行列を, 行基本変形で簡約行列にしたもの $\tilde{A}$ を次に示す.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

連立 1 次方程式の解を (パラメタ $s, \ldots \in \mathbb{R}$ を使って) 書こう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507

3

結果のみを採点

次の行列を行基本変形で簡約行列にしよう.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4

結果のみを採点

次の行列を $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角化する. 正則行列 P と対角行列 Λ を求めよう.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

次のことを導かずに使ってよい. A の固有方程式の解は, $\lambda = 6$(2 重解),2. 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5

過程も記述すること

次の行列の固有値をすべて求めよう.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

6

過程も記述すること

次の行列の逆行列 A^{-1} を求めよう.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7

過程も記述すること

次の行列 A の行列式の値を求めよう.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 12 & 21 & 14 \end{bmatrix}.$$

線形代数テスト 2a 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2019-07-23 火更新: Time-stamp: "2019-07-26 Fri 08:32 JST hig"

配点 計 100 点.

1

1. $\begin{bmatrix} -13 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}$.
2. 13.
3. $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = 48$.
4. $\det[\boldsymbol{abc}] = -\det[\boldsymbol{acb}] = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = -48 \neq 0$ なので基底である.

配点 1-4:4 点, 計 16 点.

講評 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$.

`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp` 龍谷 Moodle に内積外積スカラー 3 重積の例題解説の動画あります.

2

$$
\begin{aligned}
x_1 =& 11 - 3s - 5t, \\
x_2 =& s, \\
x_3 =& 13 - t, \\
x_4 =& t.
\end{aligned}
$$

$(s, t \in \mathbb{R})$

配点 基本は各変数 3 点, 計 12 点.

`hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評　せっかく，ピボットじゃない列の変数 x_2, x_4 を任意定数 s, t にとったら解を読み取りやすい簡約行列にして出題してあげてるのに，なんで x_1, x_4 を任意定数にとるの？ 数学的な間違いではないけど，無駄なことしてる．

$(s,t) \neq (0,0)$ は，固有ベクトルを求めるときに零ベクトルが固有ベクトルから除外されてるためにつける条件．この問は，連立方程式の解を求めなさい，だから，$s = t = 0$ を除外するのは間違い．

3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{階段行列 (の一例) へ}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約行列へ}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

配点　10 点．正しい階段行列 5 点，ピボットの位置の一致する階段行列，またはそれに近い未整理や計算ミスの結果 2 点．

4

$\lambda_1 = 2$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t.$ ($t \in \mathbb{R}$)
$\lambda_2 = 6$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$ ($s, t \in \mathbb{R}, (s,t) \neq (0,0)$)
よって，$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \Lambda$ と対角化される．

配点　Λ: 3 点，P:ヒントの固有ベクトル 3 点，$\lambda = 6$ の固有ベクトル各 6 点，計 18 点．

講評　練習問題やレポートそのままだよね～

列ベクトルの並び方が入れ替わってたり，P の列ベクトルがそれぞれ (0 でない) 定数倍されていても正解です．

特性方程式の重解の固有値に対応する固有ベクトルがパラメタ s, t (2 重解だから 2 個) を持つなら，それが係数になってる 2 個のベクトルを持って来いと．

$P = \begin{bmatrix} -2 & 2s & 2s \\ 1 & s & s \\ 0 & t & t \end{bmatrix}$ (s, t:任意) ってなった経緯は想像できるけど，まず $s = 0, t = 0$ の場合は文句なしに $\det = 0$ で P^{-1} が存在しないでしょ．正則行列 P っていう問題だからだめ．

じゃあ $P = \begin{bmatrix} -2 & 2s & 2s \\ 1 & s & s \\ 0 & t & t \end{bmatrix}$ $((s,t) \neq (0,0))$ とか，$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ならどうかっていうと，やはり $\det = 0$. 同じ列が 2 つあるから．

$P = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 2s & 2s' \\ 1 & s & s' \\ 0 & t & t' \end{smallmatrix}\right] ((s,t) \neq (0,0), (s',t') \neq (0,0), s \neq s', t \neq t')$ なら正解だけど, どうせ P は 1 個だけ答えればいいんだから, $s = t' = 1, s' = t = 0$ っておいたらいいでしょ.

要するに, 3 個の列ベクトルは, $\det P \neq 0$ となるように選びなさい, 3 個の列ベクトルが基底になるように選びなさい ($P^{-1}AP$ というのはこの基底のもとでの線形変換を表す行列になってるんだけど, その話はいつか), ってこと. $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ の解で, s, t の係数になってる 2 個のベクトルを持って来られれば, その条件を満たしたものになってる.

5

サラスの公式より, 特性方程式 $\det(A - \lambda E) = -(\lambda + 10)(\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0$. 固有値は $\lambda = -10, 4, 6$.

配点　10 点.

講評　共通因子 $(-10 - \lambda)$ 見えるんだから, ぜんぶ展開しちゃうとかやめようよ〜

記述上で行列式と行列の区別が混乱している答案は -1 点してます.

記述としては, $\lambda = ..$ が出てくる前に, 根拠として 特性多項式「$= 0$」が書いてないとへんです. 今回は減点してないけど.

行基本変形して簡単な $A' = PA$ にしてから $\det(A' - \lambda E) = 0$ を解く, のは正しい手順ではありません. $\det(A - \lambda E) = 0$ と $0 = \det(PA - \lambda E) = \det P \det(A - \lambda P^{-1})$ は同値じゃないでしょ.

6

4×8 行列 $[A|E]$ を行基本変形で簡約行列にすると, $[E|A^{-1}]$ となる.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{4}:\boxed{4}+(-3)\times\boxed{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}+(-4)\times\boxed{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}\times(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

配点　18 点.

講評　正解率は高いですが, 計算ミスした人向けのコメント. (計算ミスで)A^{-1} の列ベクトルに零ベクトルが現れたらどこかおかしいことに気づいてください.

まず, $AA^{-1}=E$ なのですから, A^{-1} は逆行列 A を持ち, $\det A^{-1}\neq 0$ です.

一方, 列ベクトルに零ベクトルがある行列の行列式は 0 になります (4 次元の平行六面体の体積が 0 だからと言ってもいいし, $\det$ の $4!=24$ 個の項を考えると各項にぜんぶ 0 がかかってるからと言ってもいいし, 転置で考えると行ベクトルに零ベクトルがあって階数が n 未満になるからと言ってもいい).

7

$$\det\begin{bmatrix}2&6&13&7\\0&0&5&1\\0&3&4&1\\2&12&21&14\end{bmatrix}\overset{\boxed{4}:\boxed{4}-\boxed{1}}{=}\det\begin{bmatrix}2&6&13&7\\0&0&5&1\\0&3&4&1\\0&6&8&7\end{bmatrix}\overset{\boxed{2}:\boxed{3},\boxed{3}:\boxed{2}}{=}-\det\begin{bmatrix}2&6&13&7\\0&3&4&1\\0&0&5&1\\0&6&8&7\end{bmatrix}$$

$$\overset{\boxed{4}:\boxed{4}+(-2)\times\boxed{2}}{=}-\det\begin{bmatrix}2&6&13&7\\0&3&4&1\\0&0&5&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}=-2\cdot 3\cdot 5\cdot 5=-150.$$

配点　16 点. だいたい, 操作 I の誤り -5 点, 操作 III の誤り -5 点, 計算ミス -2 点.

講評　4 次以上の行列にはサラスの公式はありません. 4 次の行列式を成分の積に展開して書くと, 8 個ではなく $4!=24$ 個の項からなります.

操作 I と操作 II を混ぜてやると, 何倍すればいいか間違えがちです.

記述上で行列式と行列の区別が混乱している答案は -1 点してます.

操作 III のつもりで, $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\overset{\boxed{1}:\boxed{2},\boxed{2}:\boxed{1}}{=}-\left[\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ みたいに書いてる答案がありますが, $1=-3, 2=-4, 3=-1, 4=-2$ ではないし, 忖度して $\det\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]=\det\left(-\left[\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right]\right)$ と読んでも正しくありません.

$\det\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]=-\det\left[\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ なら, $-2=-2$ という正しい式でしょ. $\left|\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right|=-\left|\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right|$ もまったく同じ $-2=-2$ を意味する記号だけど, $\det$ のほうが混乱が少ないかな?

ちなみに, $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\to\left[\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ や $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\to-\left[\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ はどちらも正しい (複数回の) 行基本変形です. 係数行列 A と思って $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を考えれば, すべて $1x+2y=0, 3x+4y=0$ を意味しています. しかし, どちらも, $\to$ の左右の行列の行列式は等しくありません. 行列式を正しく計算するには, $\det$ を等号で結んで変形していってください.