線形代数テスト 1b

樋口さぶろお[1]　配布: 2019-07-30 火 更新: Time-stamp: "2019-08-03 Sat 18:06 JST hig"

テスト 1b 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

結果のみ, 過程不要

次の行列の積が定義されるなら計算しよう. 定義されないなら「定義されない」と答えよう.

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, https://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507

2

$\boxed{\textbf{結果のみ, 過程不要}}$
行列 $A=\left[\begin{smallmatrix}2&3\\7&5\end{smallmatrix}\right]$ を考える.

1. 行列式 $\det A$ を求めよう.
2. 逆行列 A^{-1} を求めよう.
3. A^{-2} を求めよう.
4. 転置行列 ${}^{\mathrm{t}}A$ を求めよう.

3

$\boxed{\textbf{結果のみ, 過程不要}}$
実対称行列 $A=\left[\begin{smallmatrix}0&6\\6&5\end{smallmatrix}\right]$ について次が成立する.

$$A\left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]=9\left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right],$$
$$A\left[\begin{smallmatrix}6\\-4\end{smallmatrix}\right]=-4\left[\begin{smallmatrix}6\\-4\end{smallmatrix}\right].$$

関係 ${}^{\mathrm{t}}PAP=\Lambda$ が成立するような対角行列 Λ, 直交行列 P を 1 組答えよう.

4

$\boxed{\textbf{過程も記述すること}}$
平面の線形変換を考える.

1. 原点を中心とする, 反時計回りの角 θ の回転の線形変換で, 点 $\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]$ の写る点を答えよう.
2. 行列 $A=\left[\begin{smallmatrix}2&1\\-4&3\end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換で, ある点 $\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]$ が点 $\left[\begin{smallmatrix}-20\\10\end{smallmatrix}\right]$ に写る. 点 $\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]$ を求めよう.
3. 平面の点を, まず行列 $A=\left[\begin{smallmatrix}2&1\\-4&3\end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換で写し, 写った先の点をさらに行列 $B=\left[\begin{smallmatrix}0&-2\\3&0\end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換で写す, という合成された線形変換 f を考える, f を表す行列を求めよう.
4. 2 次正方行列 P,Q,R に対して, $PQR=E$ が成立する. R を, P^{-1},Q^{-1} で簡潔に書こう.

5

$\boxed{\textbf{過程も記述すること}}$
行列 $A=\left[\begin{smallmatrix}2&5\\3&4\end{smallmatrix}\right]$ を考える.

1. A の固有値固有ベクトルを求めよう.
2. $P^{-1}AP=\Lambda$ となる対角行列 Λ, 正則行列 P を 1 組答えよう.

線形代数テスト 1b 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2019-07-30 火更新: Time-stamp: "2019-08-03 Sat 18:06 JST hig"

配点 計 100 点.

1

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. 3×1 型の列の個数と, 3×2 型の行の個数が一致しないので定義されない.
3. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

2

1. $\det A = -11$.
2. $A^{-1} = -\frac{1}{11} \left[\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.
3. 定義より, $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \frac{1}{121} \left[\begin{smallmatrix} 46 & -21 \\ -49 & 25 \end{smallmatrix}\right]$. $(A^2)^{-1}$ でも求められる.
4. ${}^{\mathrm{t}}A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

講評 3 の A^{-2} はあまり使ってなかったけど, 高橋線形 p.30 で定義されてます. A^{-1} のさらに逆行列を求めようとする人がいましたが, それは A^{-2} でなく, 計算するまでもなく $(A^{-1})^{-1} = A$. これは $AA^{-1} = E$ からも読み取れるわけですが, 正則行列に対してもふつうの数に対する指数法則 $(A^n)^m = A^{nm}, A^nA^m = A^{n+m}$ が成り立ってるわけですね. ただ, $(AB)^n = A^nB^n$ は成立しないのでご注意.

$(A^{-1})^2$ と正しく分かった人の中にも, 問 1 で積 AB が計算できるのに, 積 $A^{-1}A^{-1}$ は自分ルールで計算しちゃう人がいるのはなぜ?

3

A の固有値 $\lambda_1 = 9$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ は長さ $|\boldsymbol{x}_1| = \sqrt{13}$. $\boldsymbol{x}_1$ と平行な単位ベクトル (の一例) は $\boldsymbol{x}'_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.

A の固有値 $\lambda_1 = -4$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$ は長さ $|\boldsymbol{x}_2| = \sqrt{13}$. $\boldsymbol{x}_2$ と平行な単位ベクトル (の一例) は $\boldsymbol{x}'_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

よって, $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right], P = \left[\boldsymbol{x}'_1 \quad \boldsymbol{x}'_2\right] = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right]$. 実際, ${}^{\mathrm{t}}P = P^{-1}$ となっていることがわかる.

hig@math.ryukoku.ac.jp, https://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507.

講評　テスト 1a 問題 7 そのまま (や問題 4) です．実対称行列/直交行列 ってところが問 5 と違います．

4

1. $\left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{smallmatrix}\right]$.
2. $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = A^{-1}\left[\begin{smallmatrix} -20 \\ 10 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{10}\left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} -20 \\ 10 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -7 \\ -6 \end{smallmatrix}\right]$
3. $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.
4. 左から P^{-1} をかけて ,$QR = P^{-1}$. 左から Q^{-1} をかけて $R = Q^{-1}P^{-1}$.

講評　問 3 はテスト 1a 問題 9 の再放送のようなもの．問 2 で思い出してもらおうという趣旨．だって,

$\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -20 \\ 10 \end{smallmatrix}\right]$ を, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ で写すんですよね．問 1 に正解する人ならどちら側からかけるかわかるはず.

5

1. 固有値 λ は固有方程式 $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 15$ を満たす．よって, $\lambda = 7, -1$.
   $\lambda = 7$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は, $A\boldsymbol{x}_1 = 7\boldsymbol{x}_1$ を解いて, $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
   $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ は, $A\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$ を解いて, $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.
2. $$\Lambda = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$