線形代数テスト 2b

樋口さぶろお[1] 配布: 2019-07-30 火 更新: Time-stamp: "2019-08-01 Thu 07:19 JST hig"

テスト 2b 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 過程の要不要は問題ごとの指示に従おう.
4. 行列の成分 0 は, 空白で代用してよい. 行列式の計算や行基本変形では, 複数回の基本変形の結果を 1 つの $=$ や $\to$ で表してよい. 操作 I,II,III の表示は必須でない.

1

結果のみを採点

ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix},$$

を考える.

1. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求めよう.
2. 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を求めよう.
3. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよう.
4. ベクトルの 3 個組 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の基底かどうか答えよう.

2

結果のみを採点

変数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 に対するある連立 1 次方程式の拡大係数行列を, 行基本変形で簡約行列にしたもの $\tilde{A}$ を次に示す.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

連立 1 次方程式の解を (パラメタ $s, \ldots \in \mathbb{R}$ を使って) 書こう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, https://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507

3

$\boxed{\textbf{結果のみを採点}}$

次の行列を行基本変形で簡約行列にしよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

4

$\boxed{\textbf{結果のみを採点}}$

次の行列の固有値をすべて求めよう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5

$\boxed{\textbf{結果のみを採点}}$

次の行列の逆行列 A^{-1} を求めよう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6

$\boxed{\textbf{過程も記述すること}}$

次の行列 A の行列式の値を求めよう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7

$\boxed{\textbf{過程も記述すること}}$

次の行列を $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角化する．正則行列 P と対角行列 Λ を求めよう．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

次のことを導かずに使ってよい．

- A の固有方程式の解は, $\lambda = 5$(2 重解),1 である．
- 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ である．

線形代数テスト 2b 略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2019-07-30 火更新: Time-stamp: "2019-08-01 Thu 07:19 JST hig"

配点　計 100 点.

1

1. -7
2. $\begin{bmatrix} -6 \\ +4 \\ -10 \end{bmatrix}$.
3. -22.
4. $\det[\boldsymbol{abc}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq 0$ なので基底である.

2

$$\begin{aligned} x_1 =& s, \\ x_2 =& 17 + 2t - 3u, \\ x_3 =& 19 - 4t + 5u, \\ x_4 =& t, \\ x_5 =& u. \end{aligned}$$

$(s, t, u \in \mathbb{R})$

3

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 9 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{2},\boxed{2}:\boxed{1}} \text{階段} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 & 16 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}-2\times\boxed{2}} \xrightarrow{\boxed{2}:\frac{1}{3}\times\boxed{2}} \text{簡約} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, https://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507.

4

特性方程式 $\det(A-\lambda E) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$. 固有値は $\lambda = \pm 1, 5$.

5

4×8 行列 $[A|E]$ を行基本変形で簡約行列にすると, $[E|A^{-1}]$ となる.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}+2\times\boxed{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boxed{4}:\boxed{3},\boxed{3}:\boxed{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{2}:\boxed{2}\times\frac{1}{3},\boxed{3}:\boxed{3}\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

よって,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\boxed{3}:\boxed{3}+(-2)\times\boxed{1}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}:\boxed{4},\boxed{4}:\boxed{3}}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -(1\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = -6.$$

講評

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

は, 行基本変形を複数行った変形としては正しいですが, 行列式の計算過程としては正しくありません. つまり, 連立方程式の解は変わりませんが, 行列式の値は変わってしまいます.

これらは,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

と書いても等価ですが, 右辺の行列式の値は同じではありません. つまり (-1) や 2 のような係数をメモする場所として, 行列の前の係数というのは適切でないのです. $\det$ の前の係数なら正しく記録できます.

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\det$ の外側にある係数, 内側にある係数は意味が違います.

7

$\lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$. ($t \in \mathbb{R}$)

$\lambda_2 = 5$ の固有ベクトルを $(A - 5E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ を解いて求めると, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$. $(s, t \in \mathbb{R}, (s,t) \neq (0,0))$

よって, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ とすると, $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角化される.