ベクトル, 行列, 和, スカラー倍, 内積

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L01(2019-04-09 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2019-04-09 Tue 09:51 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §1.1 n 次元ベクトル, $m \times n$ 型の行列を説明できる.
- 高橋線形 §1.2 高橋線形 §1.6 ベクトル, 行列の和, スカラー倍, 内積を計算できる. 反則を検出できる.

ここまで来たよ

学習目標

講義概要 → シラバス
線形代数とは行列とベクトルの計算の理論です．行列は数を長方形状に並べただけのものですが，機械システム工学では避けて通れません．この科目の ゴールのひとつは 3x3 行列の対角化ですが，これは他の科目ですぐ使われます．最初は，連成振動，つまり 2 個の物体と壁とがばねで結ばれた系を解く時で しょうか．変数の個数の多い連立一次方程式の解をコンピュータで求めるときも線形代数を使います．もっと先，機械学習と人工知能の記述でも線形代 数 (や行列を一般化したテンソル) は必須です．
到達目標 → シラバス

- スカラー，ベクトル，行列の和差積，内積，外積の計算ができる
- 行列の行列式，固有値，固有ベクトルの意味を説明できる
- 3×3 までの行列の固有値固有ベクトルを求め対角化することができる

線形代数を履修してはいけない理由

次のどれも響かない人は履修しないことを奨めます.

- 必修
- 理系はみんなやってる
- 機械力学 (振動, 波動), 材料力学 (弾性体) で使う
- システム工学 (人工知能, 機械学習) で使う
- n 次元がふつうになる

教科書必須です. 昨年度までと同じ. 高橋線形

線形代数ののり

成績計算難しくないけどとにかく注文の多い科目です…
科目の成績 100 ピーナッツは

- 平常点 30 ピーナッツ:毎回授業での非参照 quiz,e ラーニングの予習問題, 授業時間内の活動, それほどたいへんじゃないレポートなど
- 定期試験 70 ピーナッツ:テスト 1, テスト 2 の**の各 35 の低いほう** $\times 2$
  - テスト 1 は 6 月と定期試験期間に受験機会で高いほうを採用
  - テスト 2 は 7 月と定期試験期間に受験機会で高いほうを採用

欠席届毎回出席を前提に進めます. やむを得ず欠席して, ピーナッツ的に考慮されたい場合は, 専用用紙に事情を説明する書類を貼って, 授業前後各 5 分に提出 (事前事後とも可. 定期試験が締切). 欠席に事前連絡は原則不要. 何回欠席しても定期試験参加資格を失うことはありません.

担当者ののり

- なまえ: 樋口さぶろお hig-linalg@math.ryukoku.ac.jp
- へや: 1-507
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- Web ページ. http://hig3.net スケジュールもここから.

http://hig3.net → 線形代数 → 配布資料.

ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ベクトル, 行列, 和, スカラー倍, 内積
   - ベクトルと行列
   - ベクトルと行列の和とスカラー倍
   - ベクトルの内積

n 次元ベクトル 高橋線形 §1.1

- 平面のベクトル (2 次元のベクトル) $\vec{a} = (1, 3)$ 高校 数学 B
- 空間のベクトル (3 次元のベクトル) $\vec{b} = (1, 3, -4)$ 高校 数学 B

$\to$ n 次元のベクトル ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$). この科目

主役 縦ベクトル (列ベク…)

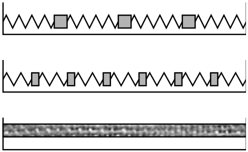
$$\boldsymbol{x} = \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

第 j 成分 $x_j \in \mathbb{C} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

$x_{\text{成分番号}}$

例 $\begin{bmatrix} 1+2i \\ 5i \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.125 \\ +0.25 \\ 0 \\ -0.25 \\ +0.125 \end{bmatrix}$

n 次元ベクトルって何に使うの?



相手役 横ベクトル (行ベク…)

$$\boldsymbol{y} = \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

第 j 成分 $y_j \in \mathbb{C} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

$y_{\text{成分番号}}$

例

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 5i & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 & 2.5 & 1.75 \end{bmatrix}$$

太文字

ふつうの文字

$a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots, A, B, C$

L01-Q1

Quiz(縦ベクトル横ベクトル)

1. 6 次元の縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ を成分表示で書こう. ただし 各成分は $x_j = \cos(\frac{2\pi j}{4})$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ で与えられる.
2. 4 次元の横ベクトル $\boldsymbol{a}$ を成分表示で書こう. ただし 各成分は $x_j = 1 - (-1)^j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ で与えられる.

行列 matrix

m 行 n 列の行列 ($m \times n$ 型の行列)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad 例 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

この例は 行数 $m = 2$, 列数 $n = 3$.

a_{ij} :i 行 j 列成分, (i, j) 成分 $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

$a_{行番号\ 列番号}$

行とは $\boxed{}$, 列とは $\boxed{}$

行列は, 縦ベクトルを横に並べたものとも思える.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \cdots$$

高橋線形問題 1.2(p.3)，問題 1.3(p.3)

L01-Q2

Quiz(行列の成分)

行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

を考える.

1. $(2,1)$ 成分を答えよう.
2. 1 行 2 列の成分を答えよう.
3. 第 2 列ベクトルを答えよう.

数学じゃなく Maple T.A. でのテキストモード入力

	数式	Maple T.A. への入力
縦ベクトル	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$	`<1,3,-7>`
横ベクトル	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$	`<1|3|-7>`
行列	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$	`< <1,3,7> | <2,6,8> >`

ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ベクトル, 行列, 和, スカラー倍, 内積
   - ベクトルと行列
   - ベクトルと行列の和とスカラー倍
   - ベクトルの内積

ベクトルの和とスカラー倍 高橋線形 §1.3

ベクトルの和

$$\text{例}\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 \\ 3+4 \\ -2+6 \\ 8+(-4) \end{bmatrix}$$

次元の異なるベクトルの和は定義されない (反則)

ベクトルのスカラー倍

スカラー ($\boxed{}$) $\lambda = -3.$　ギリシャ文字

$$\text{例}\quad \lambda \boldsymbol{a} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\times 1 \\ -3\times 3 \\ -3\times(-2) \\ -3\times 7 \end{bmatrix}$$

ベクトルの差

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{b}$$

零ベクトル, ゼロベクトル

$$\boldsymbol{o} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

どの次元でも同じ記号

(まだ) ないもの (反則)

ベクトルの不等式, ベクトルとベクトルの積, ベクトルの絶対値,

行列の和とスカラー倍 高橋線形 §1.3

行列の和

$$例\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 3+4 \\ -2+6 & 8+(-4) \end{bmatrix}$$

型の異なる 2 つの行列の和は定義されない (反則)

行列のスカラー倍

スカラー $\lambda = -3$.

$$例\quad \lambda A = -3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\times 1 & -3\times 3 \\ -3\times(-2) & -3\times 7 \end{bmatrix}$$

行列の差

$$A - B = A + (-1)B$$

零行列, ゼロ行列

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

どの型でも同じ記号を使っちゃうことが多い

高橋線形問題 1.6(p.5)

(まだ) ないもの (反則)

行列の不等式, 行列と行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の絶対値, ⋯

分配法則ほか

高橋線形問題 1.5(p.5)を公式のように使っていい.

L01-Q3

Quiz(ベクトルの和とスカラー倍)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{c} = 3(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) - 4(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ を求めよう.

L01-Q4

Quiz(行列の和とスカラー倍)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, $C = 3(A + 2B) - 4(2A - B)$ を求めよう.

ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ベクトル, 行列, 和, スカラー倍, 内積
   - ベクトルと行列
   - ベクトルと行列の和とスカラー倍
   - ベクトルの内積

ベクトルの内積 高校 数学 B 高橋線形 §1.6

$$\text{例 } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} =, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

のとき, $\bar{z}$ を z の複素共役として,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bar{1} \times 2 + \bar{9} \times 6 + \bar{5} \times (-2) + \bar{7} \times 0.$$

ベクトルの大きさ (絶対値)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{1^2 + 9^2 + 5^2 + 7^2}.$$

高橋線形問題 1.22(p.15),1.23(p.16) を公式のように使っていい.

高橋線形問題 1.21(p.15)

単位ベクトル, 直交, 平行

以下, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ とする.

$\boldsymbol{a}$ が単位ベクトル $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $|\boldsymbol{a}| = 1$.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ が直交する $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行 $\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ ある定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ があり, $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$.

ru-wifi で Learn Math Moodle + Maple T.A.

ru-wifi

ESS-ID	ru-wifi
ユーザ ID	全学認証 ID(例:t1234567)
パスワード	全学認証パスワード

iOS 特有の事項: ruradius の証明書を信頼
Android 特有の事項: CA 証明書:認証しない, 匿名 ID:入力しない

Learn Math Moodle

`http://hig3.net` → Moodle (全学認証) → 線形代数

Moodle モバイルアプリ

URL `https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle` で登録

1週間のタイムライン

1. 水 09:00 ごろまでに 予習復習問題 (=Trial 予想問題) を Learn Math Moodle で公開. 1 問題を何試行もできるけど, 2 試行目以降ちょっとずつ基礎点減少. いったん保存して別問題にすると基礎点はリセット. Trial までの最高点を記録.
2. 火 3 の最初 Trial(=小テスト) 参照不可 相談不可
3. 火 3 チーム別エリア座席指定. 講義のような演習のような. スマホ使ったり (充電してきて), チームで何かやったり.
4. 火の最後 来週の Trial の予告
5. 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)

連絡

- 次回はたぶん臨時教室変更で 1-542 計算機実習室 (計算機基礎実習 I と同じ). My 時間割を当日に見て.
- チーム別エリア座席指定する予定. メールで通知.
- Trial 予告
- 来週は教科書 高橋線形 §1.3 高橋線形 §1.4 高橋線形 1.5 読んできて.
- 来週はイヤフォン (実習室の PC にささるやつ) 持ってきて.

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター (個人・グループで勉強+上級生の相談) 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下