行列と線形変換・逆行列

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数 L03(2019-04-23 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2019-04-24 Wed 09:04 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §2.3 2 次の正方行列の逆行列が計算できる
- 高橋線形 §2.2 2 次の正方行列と 2 次元の線形変換の関係を, 回転移動, 対称移動を例に説明できる.

L02-Q1
Quiz 解答:行列の積の法則

1.

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &\overset{(1)}{=} (A+B)(A+B) \\
&\overset{(2)}{=} A(A+B) + B(A+B) \\
&\overset{(2)}{=} (A^2 + AB) + (BA + B^2) \\
&\overset{\times(4)}{\neq} A^2 + 2AB + B^2.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(A+3B)B(-2A+4B) &\overset{(2)}{=} -2(AB+3B^2)(A-2B) \\
&\overset{(2)}{=} -2(AB+3B^2)A - 2(AB+3B^2)(-2B) \\
&\overset{(1)(3)\times(4)}{\neq} -2A^2B - 6B^2A + 4AB^2 - 6B^3.
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

2. 略解: 行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置

3. 行列と線形変換・逆行列
   - 単位行列・2 次の正方行列の行列式・逆行列
   - 線形変換

単位行列 高橋線形 §1.4

$n \times n$ 行列のことを n 次の正方行列 高橋線形 p.2 という.

n 次の 単位行列

$$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

性質: (積の定義できる) 任意の行列 $A, B, \boldsymbol{v}$ に対して,
$AE = A, EB = B, E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}E = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$.

スカラー 対 行列 $=$ 1 対 単位行列.

E の (i, j) 成分を e_{ij} とすると, $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ Kronecker のデルタ記号

$\sum$ の中で, 添字置き換え係: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} b_j = b_i,$

行列式

行列式 (determinant)　高橋線形 §2.3(p.34)

2 次の正方行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ に対して, 次のスカラーを A の行列式という.

$$\det A = |A| = ad - bc$$

あとで, n 次の正方行列に対しても定義する. 高橋線形 §5.
n 次の正方行列の行列式に対して, 実は, 高橋線形定理 2.3(p.37)　高橋線形問題 2.17

$$\det A \times \det B = \det(AB).$$

高橋線形問題 2.14　高橋線形問題 2.18

行列式は「行列の式」=「行列」ではない (スカラーである). あんパンが「あんこ」でない (パンである) ようなもの.

逆行列

逆行列 (n 次の正方行列)

n 次の正方行列 A に対して,

$$AB = E$$

となる行列 B があるとき, B は A の逆行列であるといい, $B = A^{-1}$ とかく.

略記法: $A^{-n} = (A^{-1})^n$.
事実 1: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
事実 2: $(A^{-1})^{-1} = A$.
正則行列: 逆行列を持つ行列.
正則出ない例: $A = O, \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots$
$AB = O$ のとき, $A = O$ または $B = O$ とはいえない.
$AB = O$ $\boxed{}$ ならば $B = O$.

逆行列 (2 次の正方行列) 高橋線形 §2.3

2 次の正方行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ が逆行列を持つ必要十分条件は $\det A \neq 0$ である. そのとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

高橋線形問題 2.9 | 高橋線形問題 2.12 | 高橋線形演習問題 2.19

L03-Q1

Quiz(逆行列)

1. 行列
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよう.
2. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ を検算しよう.
3. $\det(100A)$, $100A$ の逆行列を求めよう.

ここまで来たよ

2 略解: 行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置

3 行列と線形変換・逆行列
- 単位行列・2 次の正方行列の行列式・逆行列
- 線形変換

線形変換 高橋線形 §2.2

A:2 次元正方行列
$\boldsymbol{r}$: 2 次元縦ベクトル
$\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ も 2 次元縦ベクトル (原点に始点をもつ平面の位置ベクトル).

線形変換

n 次元正方行列 A に対して, n 次元ベクトル $\boldsymbol{r}$ を n 次元ベクトルに写す写像

$$f(\boldsymbol{r}) = A\boldsymbol{r}$$

を, A による 線形変換, A の表す線形変換という.

平面を平面に写す写像の中でいちばん簡単なもの. A: 係数行列.
反例:平行移動は線形変換ではない

1 次元に戻って考えてみると?
$x' = f(x)$: 実数 x を実数 x' に写す写像 f.
$x' = f(x) = ax$: 1 次関数. 上の写像の中でいちばん簡単なもの. a: 係数.

L03-Q2

Quiz(線形変換)

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ の表す線形変換を考える.

1. 直線 $x = 0$, $x = 1$ は何に写る?
2. 直線 $y = 0$, $y = 1$ は何に写る?

一般に, 線形変換で, 直線は直線または 1 点に写る.

- なぜなら, 直線のパラメタ表示 $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ $(t \in \mathbb{R})$. 写した先 $(A\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{b}$ は, $A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ なら直線, $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ なら 1 点 $\boldsymbol{b}$.

一般に, 線形変換で, 平行四辺形は平行四辺形または直線または 1 点に写る.

重要な線形変換の例:回転移動

回転行列 高橋線形 p.27

2 次の正方行列

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} +\cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$$

を回転行列という. $R(\theta)$ は, 平面を原点を中心に反時計回りに θ だけ回転移動する線形変換を表す.

$\det A = 1$

特に $\theta = 0$ のとき, $\boxed{}$

高橋線形問題 2.6

重要な線形変換の例:拡大縮小

拡大縮小を表す行列 高橋線形なし

2 次の正方行列

$$S(\lambda) = \lambda E$$

は, 原点を中心とする λ 倍の拡大の線形変換を表す.

$0 < \lambda < 1$ のとき $\boxed{}$.

$\lambda < 0$ のとき $\boxed{}$

$\det A = \lambda^2$

特に $\lambda = 1$ のとき $\boxed{}$

重要な線形変換の例:対称移動

対称移動を表す行列 高橋線形 p.27

2 次の正方行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

は, それぞれ, x 軸, y 軸に関する対称移動を表す.

$\det A = -1$

高橋線形問題 2.8

重要な線形変換の例:射影

高橋線形 1 対 1 対応しない線形変換 p.30

射影を表す行列

2 次の正方行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

は, x 軸への射影を表す. $P\boldsymbol{v}$ は x 軸に下ろした垂線の足.

$\det A = 0$
直線 $y = 0$ は原点に写る.

高橋線形演習問題 2.3(1)

行列の積と線形変換の合成

平面を, まず行列 A の表す線形変換し, 次に行列 B の表す線形変換すると, 行列の積 $C = BA$ の表す線形変換を 1 回だけするのと同じ結果になる.

行列の積と線形変換の合成 高橋線形 p.29

2 つの行列の積の表す線形変換は, 2 つの線形変換の合成.

理由: 高橋線形 p.8 積の法則 (1) より.

$$B(A\boldsymbol{r}) = (BA)\boldsymbol{r}$$

$\boxed{}$. まず A, 次に B.

単位行列と恒等変換

単位行列と恒等変換 高橋線形 p.27

単位行列の表す線形変換は恒等変換.

$x' = 1 \cdot x$ みたいなもの.

逆行列と逆変換

A: 2 次の正方行列で $\det A \neq 0$.
行列 A の表す線形変換が, ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$, を
$\boldsymbol{v}_1' = A\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2' = A\boldsymbol{v}_2, \cdots$, に写す.
逆に, $\boldsymbol{v}_1'$ を $\boldsymbol{v}'$ に, $\boldsymbol{v}_2'$ を $\boldsymbol{v}_2, \cdots$ に写すよう線形変換 (逆変換) があり, それは逆行列 A^{-1} の表す線形変換である.

逆行列と逆変換 高橋線形 p.34

逆行列の表す線形変換は逆変換.

理由 $A^{-1}\boldsymbol{v}_1' = A^{-1}(A\boldsymbol{v}_1) = (A^{-1}A)\boldsymbol{v}_1 = E\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1$.

行列式の意味

行列式の線形変換での意味 高橋線形 p.35

2 次正方行列 A の表す線形変換は, 図形の面積を $|\det A|$ 倍にする.
$\det A < 0$ のとき裏返しにする.

$\det A = 0$: '直線または原点につぶれる'

連絡

線形代数 LINE@

https://line.me/R/ti/p/@arl7841z

Learn Math Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

- またチーム別エリア座席指定する予定.
- Trial 予告
- 来週は教科書 高橋線形 §3.2 高橋線形 3.3 読んできて.

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター (個人・グループで勉強+上級生の相談) 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下