2 次の正方行列の固有値・固有ベクトル

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L04(2019-04-30)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-01 Wed 07:32 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §3.2 固有値・固有ベクトルの定義を説明できる.
- 高橋線形 §3.2 2 次の正方行列の固有値・固有ベクトルを求められる.

L03-Q1

Quiz 解答:逆行列

1. $\det A = 14.\ \ A^{-1} = \frac{1}{14}\left[\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.
2. 成立する.
3. $\det(100A) = 100^2 \det A = 140000.$
   $(100A)(\frac{1}{100}A^{-1}) = E$ より,
   $(100A)^{-1} = \frac{1}{100}A^{-1} = \frac{1}{1400}\left[\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

L03-Q2

Quiz 解答:線形変換

1. $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ $A\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} t \\ 3t \end{smallmatrix}\right], A\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2+t \\ 3t \end{smallmatrix}\right]$. これは, 直線のパラメタ表示. 高校 数学 B の言葉で言えば, 直線の, 媒介変数表示されたベクトル方程式 (を縦ベクトルにしたもの).
   x', y' の式から t を消去することにより, 写る先の図形の方程式が得られ, それぞれ直線 $y' = 3x'$, 直線 $y' = 3(x' - 2)$.

2. $A\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 3 \end{bmatrix}$ より, 写る先はそれぞれ直線 $y' = 0$, 直線 $y' = 3$.

下の注意から, 4 点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の写る先の点を結んで求めてもよい.
一般に, 線形変換で, 直線は直線または 1 点に写る.

- なぜなら, 直線のパラメタ表示 $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ $(t \in \mathbb{R})$. 写した先 $(A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{b}$ は, $A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ なら直線, $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ なら 1 点 $\boldsymbol{b}$.

一般に, 線形変換で, 平行四辺形は平行四辺形または直線または 1 点に写る.

解説動画 https://youtu.be/uGeb5_FCzZU

ここまで来たよ

3 略解: 行列と線形変換・逆行列

4 2 次の正方行列の固有値・固有ベクトル
- 固有値・固有ベクトルの定義

連立漸化式を解くには? 高橋線形 §3.2(p.49

大学入試に (誘導付きで) ありがちな問題
L04-Q1

Quiz(連立漸化式)

初項が $x_0 = 1, y_0 = 1$ のとき, 次の連立漸化式の一般項 $\{x_n\}, \{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよう

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{5}x_n - \tfrac{2}{5}y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ y_{n+1} &= \tfrac{3}{5}x_n - \tfrac{6}{5}y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

位置ベクトル $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ が次々に決まっていくと思える (平面上の点列).
行列とベクトルを使って書き直すと,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = AA \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

要するに A^n が計算できればよい 以下, その準備. 高橋線形問題 3.10

固有値固有ベクトルの定義 高橋線形 §3.2(p.51)

正方行列 A に対して,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

を満たす数 λ を A の固有値 eigenvalue，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトル eigenvector という (ただし $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の時だけ考える).

固有とは, A の DNA, A ご当地, A に特徴的な, みたいな感じ. 固有周波数固有モード 固有振動

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを見つけよう. 対角行列 高橋線形 §1.7

固有値固有ベクトルの意味

$\boldsymbol{x}$ が, A の固有値 λ の固有ベクトルであるとは, 位置ベクトルを A で写しても, 向きが変わらない (か逆になるか零ベクトルになる) ということ. 大きさの倍率が固有値 λ.

- 零行列 O の固有値固有ベクトルを見つけよう.
- 単位行列 E の固有値固有ベクトルを見つけよう.
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ の固有値固有ベクトルを見つけよう.

L04-Q2

Quiz(対称移動の固有値固有ベクトル)

x 軸に関する対称移動の線形変換を表す行列の, 固有値固有ベクトルを求めよう.

固有ベクトルの性質

$\lambda, \boldsymbol{x}$ が 行列 A の固有値・固有ベクトルであるとき, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ に対して, $\lambda, c\boldsymbol{x}$ も 行列 A の固有値・固有ベクトルである.

理由

固有ベクトルの性質

$\lambda, \boldsymbol{x}$ が 行列 A の固有値・固有ベクトルであるとき,

$$A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}$$

固有値の求め方

固有値は, 固有方程式の解として求まる. 2 次の正方行列に限定して書く.

固有多項式と固有方程式

- λ の 2 次多項式 $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ を A の固有多項式, 特性多項式,
- λ についての 2 次方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ を A の固有方程式, 特性方程式

という.
A の固有値と固有方程式の解は一致する (2 次なら最大 2 個).

A の固有値が固有方程式の解である理由

$\lambda, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が A の固有値, 固有ベクトルであるが, $\det(A-\lambda E) \neq 0$ であるとする (背理法).
固有ベクトルであることから,

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\det \neq 0$ であるから, 逆行列 $(A-\lambda E)^{-1}$ が存在する

$$\begin{aligned}(A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E)\boldsymbol{x} &= (A-\lambda E)^{-1}\mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

矛盾.

例題:固有値固有ベクトルの求め方 高橋線形問題 3.11(1)

L04-Q3

Quiz(行列の固有値固有ベクトル)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求めよう.

方針 固有方程式を解いて固有値 λ_i を求めた後, 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}$ を 2 回解いて固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める.

高橋線形問題 3.11 | 高橋線形問題 3.12 | 高橋線形演習問題 3.4

L04-Q4

Quiz(固有値チェック)

値 4 は次の行列の固有値か? 判定しよう.

1. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -12 & 8 \end{bmatrix}$

L04-Q5

Quiz(固有ベクトルチェック)

ベクトル $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ は次の行列の固有ベクトルか? 判定しよう. 固有ベクトルであるなら固有値を求めよう.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

例題:連立漸化式の解き方 高橋線形 §3.2 高橋線形問題 3.14(2)

L04-Q6

Quiz(連立漸化式)

初項が $x_0 = 1, y_0 = -2$ のとき, 次の連立漸化式の一般項 $\{x_n\}, \{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよう

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& 2x_n - y_n \\ y_{n+1} =& 4x_n - 3y_n \end{aligned}$$

方針 A の固有値 λ_i, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ さえわかれば,
$A^n(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2) = aA^n\boldsymbol{x}_1 + bA_n\boldsymbol{x}_2 = a\lambda_1^n\boldsymbol{x}_1 + b\lambda_2^n\boldsymbol{x}_2$.
a, b は 1 次方程式 $a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]$ を解いて決める.

高橋線形問題 3.13 | 高橋線形問題 3.14 | 高橋線形演習問題 3.5 | 高橋線形演習問題 3.6

連絡

線形代数 LINE@

https://line.me/R/ti/p/@arl7841z

Learn Math Moodle

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

- 2019-05-07 火 授業前 紙レポート提出 問題は https://learn.math.ryukoku.ac.jp/ で印刷
- 2019-05-21 火全学休講
- 2019-05-28 火テスト 1(のりは 2019-05-07 火以降に連絡)
  - テスト 1 とテスト 2(7 月) の最低点が科目の成績 100 ピーナッツ中 70 ピーナッツ.
- 次回はたぶん定常の教室 7-002.
- またチーム別エリア座席指定する予定.
- Trial 予告
- 来週は教科書 高橋線形 3.3 読んできて.