2 次の正方行列の対角化

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L05(2019-05-07)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-28 Tue 11:26 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §3.3 2 次正方行列を対角化できる.
- 高橋線形 §3.3 2 次正方行列のべき乗を計算できる.

L04-Q1 高橋線形 §3.2 参照

L04-Q2

Quiz 解答:対称移動の固有値固有ベクトル　固有値 $+1$ の固有ベクトル $c\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ $c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$,
固有値 -1 の固有ベクトル $c\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

L04-Q3

Quiz 解答:行列の固有値固有ベクトル　$\lambda_1 = -2$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right]$, $\lambda_2 = 1$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$.

L04-Q4

Quiz 解答:固有値チェック

1. 固有多項式 $\lambda^2 - \lambda - 15$ に代入すると zero でない.
2. 固有多項式 $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ に代入すると zero.

L04-Q5

Quiz 解答:固有ベクトルチェック

1. $$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = (3+\sqrt{2}) \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$
   なので固有ベクトルである. 固有値 $3+\sqrt{2}$.
2. 固有ベクトルでない.

L04-Q6

Quiz 解答:連立漸化式　固有値固有ベクトルを求めると…(略)

初項を固有ベクトルの線形結合で書くと,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

よって,

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = a \cdot \lambda_1^n \boldsymbol{x}_1 + b \cdot \lambda_2^n \boldsymbol{x}_2 = (-1)(-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-2)^n+2 \\ -4(-2)^n+2 \end{bmatrix}$$

ここまで来たよ

4 略解: 2 次の正方行列の固有値・固有ベクトル

5 2 次の正方行列の対角化
- 行列の対角化
- 行列のべき乗

与えられた行列と対角行列の関係は? 高橋線形 §3.3(p.49)

高橋線形定理 3.6(p.56)

2 次正方行列の固有値を λ_1, λ_2 (ただし $\lambda_1 \neq \lambda_2$), 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ としたとき, 正則行列 $P = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2]$, 対角行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ により,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と書ける. Λ と基底変換行列 P を求めてこの等式を書くことを行列 A の対角化 diagonalization という.

同じ A, P, Λ に対して, $A = P\Lambda P^{-1}$ とも書ける.

1. $\boldsymbol{x}_1$ を (2 個所で一斉に) 定数倍しても成立.
2. 1,2 番目の固有値/ベクトルを (3 個所で一斉に) 入れ替えても成立.

対角化の気分

$A = Q\Lambda$ となる Q はすぐ見つかる．両側に P, P^{-1} となるところがいい．

そのうち，「P で基底を取り替えると」みたいな見方を学びます

L05-Q1

Quiz(行列の対角化)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ を対角化しよう．

先週の問題

高橋線形問題 3.16 高橋線形演習問題 3.4

$P = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2]$ で対角化できることの証明

固有値固有ベクトルの定義は,

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

並べて書くと,

$$A[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] = [\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \quad \lambda_2 \boldsymbol{x}_2] = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

両辺に左から $P^{-1} = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2]^{-1}$ をかけて,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

L05-Q2

Quiz(行列の対角化)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ である.

$$A = P^{-1} \Lambda P$$

を満たす対角行列 Λ と, 行列 P をひとつ求めよう.

(おぼえ方) どっち側からかけるのが $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$ だっけ?

パターン 1 $P^{-1}AP = \Lambda$
右から $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ かけると, 両辺ともベクトルのスカラー倍イベント発生.
式

$$PAP^{-1} \neq \Lambda$$

では, 右辺だけで起きちゃう.
パターン 2 $A = P\Lambda P^{-1}$
右から $[\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2]$ かけると, 両辺ともベクトルのスカラー倍イベント発生.
式

$$A \neq P^{-1}\Lambda P$$

では, 左辺だけで起きちゃう.

ここまで来たよ

4 略解: 2 次の正方行列の固有値・固有ベクトル

5 2 次の正方行列の対角化
- 行列の対角化
- 行列のべき乗

対角化の使い道 1

行列のべき乗

$$A^n = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

なぜなら

$$\begin{aligned} A^n =& (P\Lambda P^{-1})^n \\ =& (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \cdots (P\Lambda P^{-1}) \\ =& P\Lambda^n P^{-1} \end{aligned}$$

L05-Q3

Quiz(行列のべき乗)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ に対して, A^n を求めよう $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

高橋線形問題 3.16

行列の負のべき

定義 $A^{-n} = (A^{-1})^n$. 高橋線形 p.30

性質 $A^{-n} = (A^n)^{-1}$.

L05-Q4

Quiz(行列の負のべき乗)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ に対して, A^{-n} を求めよう $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

行列の積の逆行列 高橋線形なし

A, B が正則なとき, AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \overset{\text{一般には}}{\neq} A^{-1}B^{-1}$$

対角化の使い道 2 I

漸化式の一般項の別の計算方法 高橋線形 p.57

$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ のとき，

$$\boldsymbol{x}_n = A^n \boldsymbol{x}_0 = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1} \boldsymbol{x}_0.$$

L05-Q5

対角化の使い道 2 II

Quiz(行列のべき乗による漸化式の解)

初項が $x_0 = 1, y_0 = -2$ のとき，次の連立漸化式の一般項 $\{x_n\}, \{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよう

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} =& 2x_n - y_n, \\
y_{n+1} =& 4x_n - 3y_n.
\end{aligned}
$$

高橋線形問題 3.15

行列の話なしで高校生を驚かす方法

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{n+1} =& A\boldsymbol{x}_n \\
\boldsymbol{x}_{n+1} =& P\Lambda P^{-1}\boldsymbol{x}_n \\
P^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1} =& \Lambda P^{-1}\boldsymbol{x}_n
\end{aligned}
$$

そこで $\boldsymbol{a}_n = \left[\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}\right] = P^{-1}\boldsymbol{x}_n = P^{-1}\left[\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right]$ とおく.

$$
\boldsymbol{a}_{n+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_n
$$

つまり,

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} =& \lambda_1 a_n \\
b_{n+1} =& \lambda_2 b_n
\end{aligned}
$$

「a, b に分離された」「漸化式が対角化された」

先週の例

L05-Q6

Quiz(行列のべき乗による漸化式の解)

初項が $x_0 = 1, y_0 = -2$ のとき, 次の連立漸化式の一般項 $\{x_n\}, \{y_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を, 等比数列になる a_n, b_n を発見して求めよう.

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} =& 4x_n - 3y_n. \end{aligned}$$

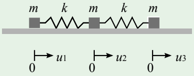
行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right]$ に対して, A^n を求めよう $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

力学 (連成振動) への応用

高橋線形演習問題 3.7,3.8 L05-Q7

Quiz(3 点の連成振動)

図のように 2 つのばね (ばね定数 k) で結ばれた質量 m の 3 質点が, 一直線上で運動している. 時刻 t における位置 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ は, それぞれの質点のつりあいの位置 (ばねがともに自然長になる位置) から測ったものである.



1. x_1, x_2, x_3 について運動方程式をたてよう.
2. 固有振動数を求めよう.
3. 固有モード (固有ベクトル) を求めよう.

Quiz 解答:3 点の連成振動

1. $$\begin{aligned} mx_1'' &= +k(x_2 - x_1) \\ mx_2'' &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ mx_3'' &= \qquad\qquad\quad -k(x_3 - x_2) \end{aligned}$$
2. 行列 $\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値の平方根を求めて, $\omega = 0, \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{3k}{m}}$.
3. 書く固有値に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, $v_0, x_0, C_2, C_3, \phi_2, \phi_3$ を定数として,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(v_0 t + x_0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi_2\right), \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t + \phi_3\right)$.

連絡

線形代数 LINE@

https://line.me/R/ti/p/@arl7841z

Learn Math Moodle

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター (個人・グループで勉強+上級生の相談) 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下

- 2019-05-13 月 15:20 までに, 1-507 前の箱にレポート提出 問題は https://learn.math.ryukoku.ac.jp/ から PC で印刷
- 2019-05-23 金 19:00 までに, 1-507 前の箱にレポート提出 問題は https://learn.math.ryukoku.ac.jp/ から PC で印刷

- 次回はたぶん定常の教室 7-002.
  1. またチーム別エリア座席指定する予定.
  2. Trial 予告
  3. 来週は教科書 高橋線形 3.5 高橋線形 3.6 読んできて.
- 2019-05-21 火全学休講
- 2019-05-28 火テスト 1
  - テスト 1 とテスト 2(7 月) の最低点が科目の成績 100 ピーナッツ中 70 ピーナッツ.
  - 計算機実習室 1-542. Web 解答+一部の解答手書き解答の予定.
  - 説明や準備を除いた答案作成部分 45 分
  - お奨めの準備方法. 1) これまでの Trial を最短距離でできるようにしておく (Web の問題・解答も再度確認できます). 2) 予習復習問題を最短距離でできるようにしておく. 3) 配布資料で言及されている教科書の問題を解く.
  - 出題計画
    - ★ 行列・ベクトルの積の計算. 定義されないときの判定 (Trial L03)
    - ★ 回転行列, 線形変換の逆や合成 (Trial L04)
    - ★ 2 次正方行列の固有値固有ベクトルの計算 (Trial L05)
    - ★ 2 次正方行列の対角化 (Trial L05, Report L05)