# 線形変換としての対角化の意味・直交変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L06(2019-05-14)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-14 Tue 10:45 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §3.3 行列の対角化を線形変換としてみて説明できる
- 高橋線形 §3.4 対称行列を直交行列で対角化できる

L05-Q1

Quiz 解答:行列の対角化　別に計算した結果から, $\lambda_1 = -2$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right]$, $\lambda_2 = 1$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$.
よって,

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

L05-Q2

Quiz 解答:行列の対角化

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\1 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}.$$

両辺の左から $\left[\begin{smallmatrix}1 & 5\\4 & 2\end{smallmatrix}\right]$, 右から $\left[\begin{smallmatrix}1 & 5\\4 & 2\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ をかけて,

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\1 & -4\end{bmatrix}^{-1}.$$

よって, $\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

L05-Q3

## Quiz 解答:行列のべき乗

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 4-4(-2)^n & -1+4(-2)^n \end{bmatrix}.$$

L05-Q4

## Quiz 解答:行列の負のべき乗

$A^{-1} = (P\Lambda P^{-1})^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1}$ より,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^{-n} & 0 \\ 0 & 1^{-n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4-(-2)^{-n} & -1+(-2)^{-n} \\ 4-4(-2)^{-n} & -1+4(-2)^{-n} \end{bmatrix}.$$

L05-Q5

## Quiz 解答:行列のべき乗による漸化式の解

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 4-4(-2)^n & -1+4(-2)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-2)^n \\ 2-4(-2)^n \end{bmatrix}.$$

L05-Q6

## Quiz 解答:行列のべき乗による漸化式の解

$P^{-1}\boldsymbol{x}_n = \left[\begin{smallmatrix} x_n - y_n \\ 4x_n - y_n \end{smallmatrix}\right]$ より，
$a_n = x_n - y_n$, $b_n = 4x_n - y_n$ と定義する．連立漸化式を加減すると
$a_{n+1} = -2a_n, b_{n+1} = b_n$ と, 2 つの等比数列に分離される．以下略.

# ここまで来たよ

5 略解: 2 次の正方行列の対角化

6 線形変換としての対角化の意味・直交変換
- 行列の対角化の線形変換としての意味
- 対称行列の直交行列による対角化

# 行列の対角化の線形変換としての意味 I

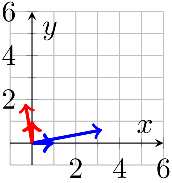
略記 $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$.

$A = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda_1 = 3, \lambda_1 = 2$, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$.

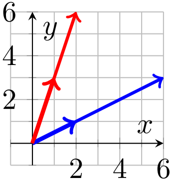
$A$ の表す変換

$A = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$

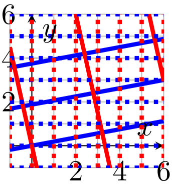
$A\boldsymbol{e}_i$

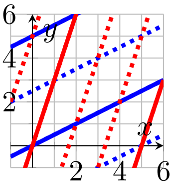



$A\boldsymbol{x}_i$




太い矢印が, 同じ色の細い矢印に写される.



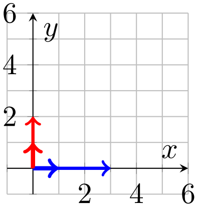




点線が, 同じ色の実線に写される.
線形変換は, 2 つのベクトルの写る先で決まる
$A(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) = aA\boldsymbol{e}_1 + bA\boldsymbol{e}_2$, $A(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2) = aA\boldsymbol{x}_1 + bA\boldsymbol{x}_2$
なので, $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2$ または $A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2$ がわかれば平面全体の行き先がわかる.

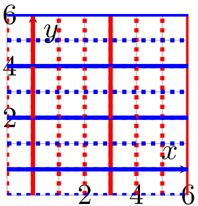
$$P^{-1}AP = \Lambda$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 対角行列 $\Lambda$ の表す変換

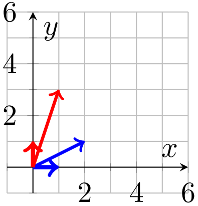



$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\Lambda \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{e}_1, \Lambda \boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{e}_2$



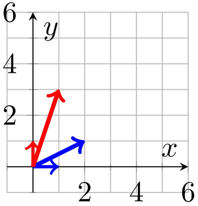
## 固有ベクトルを並べた正則行列 $P$ の表す変換

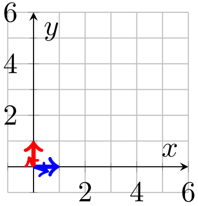
$$P = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$$
$$P\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_1, P\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{x}_2$$



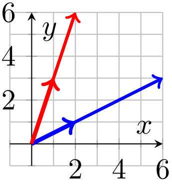

## 固有ベクトルを並べた正則行列 $P$ の逆行列 $P^{-1}$ の表す変換

$$P^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$
$$P^{-1}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, P^{-1}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2$$

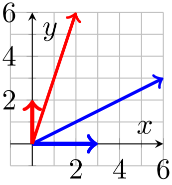


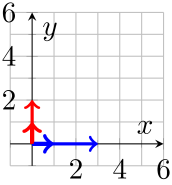



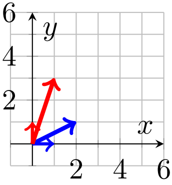
$$A = P\Lambda P^{-1}$$




$=$



# ここまで来たよ

5 略解: 2 次の正方行列の対角化

6 線形変換としての対角化の意味・直交変換
- 行列の対角化の線形変換としての意味
- 対称行列の直交行列による対角化

# 実対称行列

## 実対称行列の定義 高橋線形 §3.5(p.62)

$n$ 次正方行列 $A$ が実対称行列であるとは, 成分がすべて実で, 次が成立すること.

$$ {}^{\mathrm{t}}A = A $$

例

## 2 次の実対称行列の性質 高橋線形定理 3.7,3.8(p.62,63)

- 2 次実対称行列の固有値は実数.
- 2 次実対称行列には, 互いに直交する 2 個の実の固有ベクトルがある.

高橋線形問題 3.21

## L06-Q1

### Quiz(実対称行列の直交行列による対角化)

行列

$$A = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & \frac{36}{5} \\ \frac{36}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

の固有値固有ベクトルを求めよう.

# 直交行列

## 直交行列の定義 高橋線形 §3.5(p.63)

$n$ 次正方行列 $P$ が直交行列であるとは, 成分がすべて実で, 次が成立すること.

$$ {}^{\mathrm{t}}PP = E $$

## 2 次の直交行列の性質 高橋線形定理 3.9

- $P$ が直交行列であるとき, $P^{-1} = {}^{t}P$.
- $P, Q$ が直交行列であるとき, 積 $PQ$ も直交行列.

## 2 次の直交行列の性質 高橋線形定理 3.9

2 つの 2 次元列ベクトルを並べた 2 次正方行列 $P = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2]$ について，次の 3 つは同じこと (必要十分条件).

1. $P$ は直交行列.
2. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は，互いに直交する単位ベクトル，
3. $$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \delta_{ij}$$

   つまり，
   $$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = 1, \quad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$$

なぜなら，

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}PP &= E \\ \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_1 \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \\ (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## ベクトルの正規化 (規格化)

長さが 1 のベクトルを単位ベクトルという.
ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, 平行な単位ベクトル $\boldsymbol{x}'$ を求めることを規格化, 正規化といい, $\boldsymbol{x}'$ を規格化, 正規化されたベクトルという.
$\boldsymbol{x}' = \pm\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ の 2 通り.

L06-Q2

## Quiz(ベクトルの規格化)

ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

と同じ大きさで平行なベクトルをひとつ求めよう (規格化しよう).

## 2 次直交行列の表す線形変換 高橋線形なし

2 次直交行列の表す線形変換は, 内積を変えない. したがって, 長さや角度を変えない.

$(P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y}) = {}^t(P\boldsymbol{x})P\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tPP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

例: 回転, 対称, 回転と対称の組合せ. 合同な図形との重ね合わせ.

2 次直交行列は, 平面を拡大縮小したりひずませたりせずに, 回転したり裏返したりして写す.

## 2 次の直交行列の性質 高橋線形定理 3.9

2 次実対称行列 $A$ は, 直交行列 $P$ で,

$$ {}^tPAP = \Lambda $$

と対角化できる.

L06-Q3

## Quiz(対称行列の直交行列による対角化)

実対称行列

$$ A = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & \frac{36}{5} \\ \frac{36}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} $$

を, 直交行列で対角化しよう.

$P$ を調整して直交行列にしてね, という意味.

高橋線形問題 3.24 高橋線形演習問題 3.9

## Wolfram|Alpha

Web で Wolfram Alpha で検索 か

`https://www.wolframalpha.com`

モバイルアプリ (有料だけど安い)

`https://products.wolframalpha.com/mobile`

# Wolfram|Alpha での行列の計算

https://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html

行列 $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]$ `{{1,2},{3,4}}`

逆行列 $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ `{{1,2},{3,4}}^(-1)`

行列の積はピリオド $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}5&6\\7&8\end{smallmatrix}\right]$ `{{1,2},{3,4}} . {{5,6},{7,8}}`

$\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]$ の固有値固有ベクトル `Eigensystem[{{1,2},{3,4}}]`

$\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]$ の対角化 (直交行列によるとは限らない)

`Diagonalize[{{1,2},{3,4}}]`

Wolfram Mathematica

- もっと高機能でほぼ同文法な, PC で動作する数式処理ソフトウェア
- 実習室で使用可能

ルール: Trial, テストでは持込なし. レポート, 予習復習問題の解答, 検算には自由に使っていい. けど, 過程の記述として, 「Wolfram—Alpha によ

# 連絡

線形代数 LINE@

サポート

`https://line.me/R/ti/p/@arl7841z`

Learn Math Moodle

`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/`

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター (個人・グループで勉強+上級生の相談) 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下

- 2019-05-23 金 19:00 までに, 1-507 前の箱に行列のべき乗のレポート提出 問題は `https://learn.math.ryukoku.ac.jp/` から PC で印刷

- 2019-05-21 火全学休講
- 2019-05-28 火テスト 1 たぶん実習室 1-542
  - テスト 1 とテスト 2(7 月) の最低点が科目の成績 100 ピーナッツ中 70 ピーナッツ.
  - 計算機実習室 1-542. Web 解答+一部の解答手書き解答の予定.
  - 説明や準備を除いた答案作成部分 45 分
  - お奨めの準備方法. 1) これまでの Trial を最短距離でできるようにしておく (Web の問題・解答も再度確認できます). 2) 予習復習問題を最短距離でできるようにしておく. 3) 配布資料で言及されている教科書の問題を解く.
  - 出題計画
    - ★ 行列・ベクトルの積の計算. 定義されないときの判定 (Trial L03)
    - ★ 回転行列, 線形変換の逆や合成 (Trial L04)
    - ★ 2 次正方行列の固有値固有ベクトルの計算 (Trial L05)
    - ★ 2 次正方行列の対角化 (Trial L05, Report L05)
    - ★ 2 次実対称行列の直交行列による対角化 (予習復習問題だけ)