2 元連立 1 次方程式

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L07(2019-06-04)

最終更新: Time-stamp: "2019-06-04 Tue 10:13 JST hig"

今日の目標

- 行列の行基本変形が説明できる　高橋線形 §3.1
- 行列の行基本変形で, 解なし, 不定も含め, 連立 1 次方程式の解が求められる　高橋線形 §3.1
- 行列の階数 rank が求められる　高橋線形 §3.1

L06-Q1

Quiz 解答:実対称行列の直交行列による対角化

固有値 $\lambda_1 = 10$ に対応する規格化された固有ベクトルのひとつは $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

固有値 $\lambda_2 = -5$ に対応する規格化された固有ベクトルのひとつは $\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

よって, 直交行列 $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ で,

$$ {}^{\mathrm{t}}PAP = \Lambda $$

と対角化される. ただし, 対角行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

一般の n 元連立 1 次方程式 高橋線形 §4.1

n:変数 (未知数) の個数, m: 式の個数.
未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$
係数 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
定数項 $b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

解: これを満たす組 $(x_1, \ldots, x_n)$ の組.

解全体の集合 (解集合) は n 次元空間 $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$ の部分集合.

一般的な解法を考えたい. 解かなくても構造がわかるようになりたい.

× 代入法　○ 加減法, 消去法, 掃き出し法

連立 1 次方程式の基本変形

連立 1 次方程式の基本変形 高橋線形 p.41

m 個からなる連立方程式に次の操作をしても解は変わらない.

操作 I(i,a) 定数倍 i 番目の式に a をかける $(a \neq 0)$
操作 II(i,j,b) 定数倍を加える i 番目の式に j 番目の式の b 倍を加える
操作 III(i,j) 交換 i 番目の式と j 番目の式を入れ替える

基本変形を繰りかえし適用して, m 個の式

$$
\begin{cases}
x_1 &= b'_1 \\
x_2 &= b'_2 \\
&\vdots \\
x_m &= b'_m
\end{cases}
$$

に到達するのが, 加減法=消去法=掃き出し法. ×代入法

2 元連立 1 次方程式の場合の消去法の例 高橋線形 §3.1

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

↓ $\boxed{\text{II(2,1,-1)}}$ (2): (2)+(1)$\times(-1)$

意味 新 (2) に旧 (2)+旧 (1)$\times(-1)$ を代入

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x = 1 & (2) \end{cases}$$

↓ $\boxed{\text{III(1,2)}}$ (2):(1), (1):(2)

↑ $\boxed{\text{III(2,1)}}$ (1):(2),(2):(1)

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ 2x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

↓ $\boxed{\text{II(2,1,-2)}}$ (2):(2)+(1)$\times(-2)$

↑ $\boxed{\text{II(2,1,2)}}$ (2):(2)+(1)$\times 2$

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ -y = 2 & (2) \end{cases}$$

↓ $\boxed{\text{I(2,-1)}}$ (2):(2)$\times(-1)$

↑ $\boxed{\text{I(2,-1)}}$ (2):(2)$\times\frac{1}{-1}$

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ y = -2 & (2) \end{cases}$$

解は $(x, y) = (1, -2)$ 解集合は $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$

解は他にないの?

$$x - 1 = 0$$

$\downarrow$(1):(1)$\times(x+1)$ $\not\uparrow$ (1):(1)$\times\frac{1}{x+1}$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$\updownarrow$

$$x = 1, -1$$

逆にたどれるなら同値

係数行列，拡大係数行列による楽な表現

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

拡大係数行列，係数行列

拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ 　係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

これらを使って書くと，もとの連立 1 次方程式は，

$$\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

行列の行基本変形

$m \times n$ 行列で

操作 I(i,a)	i 行目に定数 a をかける $(a \neq 0)$
操作 II(i,j,b)	i 行目に j 行目の b 倍を加える
操作 III(i,j)	i 行目と j 行目を入れ替える

https://register.math.ryukoku.ac.jp/linalg/deform

全学認証

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\boxed{\text{II(2,1,-1)}}$ (2): (2)+(1)$\times(-1)$

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & (1) \\ x = 1 & (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\boxed{\text{III(1,2)}}$ (2):(1), (1):(2)

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ 2x - y = 4 & (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\boxed{\text{II(2,1,-2)}}$ (2):(2)+(1)$\times(-2)$

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ -y = 2 & (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\boxed{\text{I(1,-1)}}$ (2):(2)$\times(-1)$

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ y = -2 & (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解の集合は $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

解が存在しない場合 高橋線形 pp.42,43

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2):(2)+(1)\times(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -1 & (1) \\ \quad 0 = 3 & (2) \end{cases}$$

矛盾.
解の集合は空集合.

解が無数にある場合 高橋線形 pp.42,43

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{(2):(2)+(1)\times(-2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(1):(1)\times\frac{1}{2})}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -\dfrac{1}{2} & (1) \\ 0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$2x + y = -1$.
$y = t \in \mathbb{R}$ とおくと,

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

解は無数にある.
「不定」だけでなく, 上のように解の集合を具体的に答える.

階段行列と階数 高橋線形 pp.44,45

拡大係数行列の行基本変形で, いちばん左の列から順に non-zero 成分を上に持ってきて, その下をすべて zero にする.
繰りかえすと, 下のいずれか 1 つだけの形 (階段行列) に必ず到達する.
$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, *$:任意

階数 rank$\tilde{A}$\rank$A$	2	1	1	0
2	$\begin{bmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & * \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$	
1		$\begin{bmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
0				$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

「必ず 0」の部分とそれ以外の部分を塗り分ける.
それ以外の部分を (ひっくり返した) 階段とみなして, その段数を行列の階数 ランク rank という.
記号: rank$\tilde{A}$, rank$A$.
階数とは, 「実質的な」式の個数

L07-Q1

Quiz(階段行列と連立 1 次方程式の解)

変数 x, y に対する連立 1 次方程式の拡大係数行列

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

を, 行基本変形により, 階段行列に変形しよう. その際, 使った操作を明示しよう.
連立 1 次方程式の解を求めよう.

高橋線形問題 3.3 | 高橋線形演習問題 3.1

2 元連立 1 次方程式の解と階数 高橋線形定理 3.1

1. 連立方程式に解が存在 $\Leftrightarrow$ rank$\tilde{A} =$ rank$A$
2.
    1. 解が一意的 (1 個だけ=点) $\Leftrightarrow$ rank$A = 2.$
    2. 解が無限個 (直線) $\Leftrightarrow$ rank$\tilde{A} =$ rank$A = 1.$
    3. 解が無限個 (平面) $\Leftrightarrow$ rank$\tilde{A} =$ rank$A = 0.$

行基本変形と行列式 高橋線形定理 3.2

A:2 次正方行列

$A \overset{\text{基本変形}}{\rightarrow} A'$ のとき,

$\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0.$

$(\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0).$

行列式と階数 高橋線形定理 3.3

A:2 次正方行列

rank$A = 2 \Leftrightarrow \det A \neq 0.$

rank$A \leq 1 \Leftrightarrow \det A = 0.$

2 次正方行列の性質 高橋線形定理 3.4 一部省略

A:2 次正方行列
次の条件はすべて同値.

- A が正則
- $\mathrm{rank} A = 2$
- $\det A \neq 0$
- A^{-1} が存在
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在し一意的 (解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$).

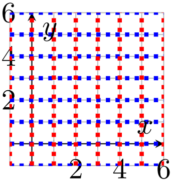
平面の線形変換の言葉では?

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

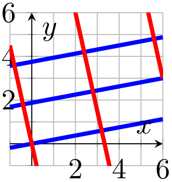
を解けとは,
「A の表す線形変換で $\boldsymbol{b}$ に写る点 $\boldsymbol{x}$ (の集合) を見つけろ」
ケース 1 rank$\tilde{A}$ =?, rank$A$ =?.

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A の表す写像



$\boldsymbol{x} \xrightarrow{A} \boldsymbol{b}$

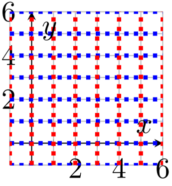


点線が, 同じ色の実線に写される.
解集合は 1 点からなる集合.

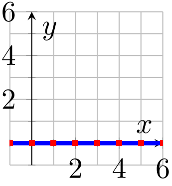
ケース 2 rank$\tilde{A}$ =?, rank$A$ =?.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A の表す写像



$\boldsymbol{x} \xrightarrow{A} \boldsymbol{b}$



無数の解 $\left[\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$

解集合は直線

ケース 3 rank$\tilde{A}$ =?, rank$A$ =?.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解なし.

解集合は空集合.

連絡

- 来週 2019-06-11 火 3 は 7-002 の予定
- 紙の Trial
- 学期途中の振り返りのレポート 2019-06-11 火 23:55)
  `https://manaba.ryukoku.ac.jp`

線形代数 LINE
公式アカウント

`https://line.me/R/ti/p/@arl7841z`

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.
検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201

https://maple.st.ryukoku.ac.jp/

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下