n 元連立 1 次方程式

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L08(2019-06-11)

最終更新: Time-stamp: "2019-06-11 Tue 17:54 JST hig"

今日の目標

- 行列の行基本変形が説明できる　高橋線形 §4.1
- 行列の行基本変形で, 解なし, 不定も含め, 連立 1 次方程式の解が求められる　高橋線形 §4.1
- 行列の階数 rank が求められる　高橋線形 §4.1

L07-Q1

Quiz 解答:階段行列と連立 1 次方程式の解

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}+\boxed{2}\times(-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{2},\boxed{2}:\boxed{1}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{2}:\boxed{2}\times(-\frac{1}{7})}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}:\boxed{1}\times(-\frac{4}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & +\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

ここまで来たよ

7. 略解: 2 元連立 1 次方程式

8. n 元連立 1 次方程式
   - $m \times n$ 行列の簡約化
   - 簡約行列と連立 1 次方程式の解
   - 逆行列

一般の n 元連立 1 次方程式 高橋線形 §4.1

n:変数 (未知数) の個数, m: 式の個数.
未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$
係数 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
定数項 $b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

解: これを満たす組 $(x_1, \dots, x_n)$ の組.

解全体の集合 (解集合) は n 次元空間 $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$ の部分集合.

係数行列，拡大係数行列による楽な表現

$$\begin{cases} 2x - y = 4 & \boxed{1} \\ 3x - y = 5 & \boxed{2} \end{cases}$$

拡大係数行列，係数行列

拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$　係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

これらを使って書くと，もとの連立 1 次方程式は，

$$\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

行列の行基本変形

$m \times n$ 行列で

操作 I(i,a)	i 行目に定数 a をかける $(a \neq 0)$
操作 II(i,j,b)	i 行目に j 行目の b 倍を加える
操作 III(i,j)	i 行目と j 行目を入れ替える

https://bit.ly/rrmatrix

(全学認証)

高橋線形定理 4.1

拡大係数行列に行基本変形を行っても, 対応する連立 1 次方程式の解は変わらない

復習

L08-Q1

Quiz(階段行列と連立 1 次方程式の解)

変数 x, y に対する連立 1 次方程式の拡大係数行列

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

を, 行基本変形により, 階段行列に変形し, 階数を求めよう. a は定数.
連立 1 次方程式の解を求めよう.
Hint: a の値による場合分けが必要かも.

階段行列

階段行列

m 行 n 列の行列 A が階段行列であるとは,
i 行の, 左から連続する 0 の個数を ℓ_i 個 $(1 \leq i \leq m, 0 \leq \ell_i \leq n)$ として,

$$\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_r < \underbrace{\ell_{r+1} = \cdots = \ell_m =}_{r=m\text{ ならこの部分はなくてよい}} n$$

であること. このとき, $r = \mathrm{rank} A$ (階数).
零行列は, 階段行列で $r = 0$ とみなす $(\ell_0 = \ell_1 = \cdots = \ell_m = n)$.

簡約行列

行列 A が簡約行列であるとは, A が階段行列で, かつ次を満たすもの.

- 行の最初の non-zero 成分 $\alpha, \beta, \cdots$ (ピボットという) は 1.
- 各列のピボットより上の成分はすべて 0

階段行列，簡約行列の例 ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0, * :$ 任意)

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \beta & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ℓ の不等式を書いて．r は?

高橋線形定理 4.2

ひとつの行列 A から出発して行基本変形をしたとき,

1. 階段行列に到達しも, その行列は一意的でないが, 階数 (0 でない成分を含む行の個数) は一意的 (だから $\mathrm{rank}A$ と書く).
2. 簡約行列に到達したとき, その簡約行列は一意的.

ここまで来たよ

7 略解: 2 元連立 1 次方程式

8 n 元連立 1 次方程式
- $m \times n$ 行列の簡約化
- 簡約行列と連立 1 次方程式の解
- 逆行列

解が存在しない場合 高橋線形 §4.1 例題 4.1(2)

$m \times (n+1)$ 型拡大係数行列 $\tilde{A}$ を階段行列に変形したとき, $\alpha \neq 0$ で,

$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

となっているとき.
$0 \cdot x_1 + \cdots 0 \cdot x_n = \alpha \neq 0$ となっているので, 矛盾. 解なし.
さらに簡約行列にしてもこの形.
$\mathrm{rank}\tilde{A} > \mathrm{rank}A$.

解が存在する場合の解き方 高橋線形 §4.1 例題 4.1(1)(3)

1. $*$ になっている列の変数を, パラメタ $s, t, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく.
2. ピボットの列に対応する変数は, パラメタで書ける.

例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

変数名を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

ピボット以外の列 (0 や $*$ の列) について, $x_1 = s, x_4 = t, x_6 = u$ とおく.

ピボットの $*$ の列から

$$\begin{aligned} x_1 &= s \\ x_2 &= b_1 - 0 \cdot s - *t - *u \\ x_3 &= b_2 - 0 \cdot s - *t - *u \\ x_4 &= t \\ x_5 &= b_3 - 0 \cdot s - *t - *u \end{aligned}$$

ピボットの列だけなら一意的な解.

高橋線形例題 4.1, 問題 4.1, 問題 4.2, 問題 4.4, 演習問題 4.1, 演習問題 4.2

高橋線形 §4.3 定理 4.4

n 元連立 1 次方程式の $m \times n$ 型の係数行列を A, $m \times (n+1)$ 型の拡大係数行列を $\tilde{A}$ とするとき,

- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A + 1$ なら解なし.
- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A (= r) < n$ なら無限個の解 ($n - r$ 個のパラメタ)
- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A = n$ なら一意解

高橋線形問題 4.7

同次方程式の場合

右辺が $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ である連立 1 次方程式を同次方程式, 右辺が $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ である連立 1 次方程式を非同次方程式という. (非) 同次=(non-)homogeneous.

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

は常に自明解 (trivial solution) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を持つ. それ以外の解を非自明解 (non-trivial solution) という.

高橋線形 §4.3 定理 4.5

n 元連立 1 次方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とするとき,

- ~~$\mathrm{rank}\tilde{A}=\mathrm{rank}A+1$ なら解なし.~~
- $\cancel{\mathrm{rank}\tilde{A}=}\mathrm{rank}A(=r)<n$ なら自明解に加えて無限個の非自明解 ($n-r$ 個のパラメタ)
- $\cancel{\mathrm{rank}\tilde{A}=}\mathrm{rank}A=n$ なら一意解 (自明解) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

線で消したところは, 同次方程式に対しては起きないので簡単化される.

ここまで来たよ

行基本変形による逆行列の決定 (3x3 以上) 高橋線形 §4.4

行列の行基本変形

$m \times n$ 行列で

操作 I(i,a) i 行目に定数 a をかける $(a \neq 0)$
操作 II(i,j,b) i 行目に j 行目の b 倍を加える
操作 III(i,j) i 行目と j 行目を入れ替える

操作 I の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$PA = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

操作 II の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$
PA = \begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \color{red}{1} & & \color{blue}{b} & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \\
\color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\
\vdots & & & \\
\color{blue}{a_{j1}} & \color{blue}{a_{j2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{jn}} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

操作 III の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$
PA = \begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & \color{blue}{1} & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & \color{red}{1} & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \\
\color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\
\vdots & & & \\
\color{blue}{a_{j1}} & \color{blue}{a_{j2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{jn}} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

k 回の変形の繰りかえしは
$P_k \cdots P_3 P_2 P_1 A.$
よって $A^{-1} = P_k \cdots P_1$ であるはず.
これでまあ簡単に求める方法. $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を簡約行列に変形する. $\mathrm{rank} A = n$ なら,

$$[A|E] \xrightarrow{\text{行基本変形 } k \text{ 回}} [(P_k \cdots P_1 A)|(P_k \cdots P_1 E)] = [E|B]$$

となる. $B = A^{-1}$.

例題

Example

基本変形による逆行列の求め方

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

高橋線形問題 4.13, 演習問題 4.5

連絡

- 来週 2019-06-18 火 3 は…
- 紙の Trial
- 学期途中の振り返りのレポート 2019-06-11 火 23:55)
  https://manaba.ryukoku.ac.jp

線形代数 LINE
公式アカウント

https://line.me/R/ti/p/@arl7841z

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.
検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201`

`https://maple.st.ryukoku.ac.jp/`

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下