3 次元空間の直線と平面

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L10(2019-07-02)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-03 Wed 10:06 JST hig"

今日の目標

- 空間の直線をパラメタ表示, 方程式で書ける
- 空間の平面をパラメタ表示, 方程式で書ける
- 3 元連立 1 次方程式の解空間を表現できる

L09-Q1

Quiz 解答:3 次元ベクトルの内積となす角

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\times 0 + 1 + 0\times 1 = 1.$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \theta = \pi/3. \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi \text{という習慣}$$

L09-Q2

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積 $\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6\\4\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-5 & -2\\-6 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-6 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-17\\-22\end{bmatrix}$

L09-Q3

Quiz 解答:スカラー 3 重積

1. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+2\\0\\-2\end{bmatrix}$. 面積は, $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}| = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$.
2. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}+2\\0\\-2\end{bmatrix} = 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) = -2$ よって体積はその絶対値 $|-2| = 2$.

行基本変形 高橋線形 p.89 で逆行列が求まるわけ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を求めたい. 原理的には,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を解いて a, b, c, d を決めればよい. 4 元連立 1 次方程式だけど, 2 組の 2 元連立 1 次方程式にわけられる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって, 拡大係数行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

をそれぞれ簡約行列にもってけばいい. あれ? 2 個あるけど, 使う行基本変形は同じで,

$$\xrightarrow{\text{ある行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad \xrightarrow{\text{同じ行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

となるはず. 2 つを横につなげて書くと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ある行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

数式処理システム (CAS=Computer Algebra System)

数値でなく, 数式のまま, 誤差なしに計算できる. グラフが簡単に描ける.
Mathematica 有料. 理工学部がサイトライセンスを持っているので, 計算機実習室で使える スタートボタン → 数学・統計・分析 → Mathematica.
新規ドキュメントで新しい「ノートブック」
計算実行は Shift+Enter

Wolfram|Alpha 無料版と有料版 (モバイルの有料版は安い). ブラウザで利用. 文法は Mathematica の従兄弟くらい.
`https://www.wolframalpha.com`

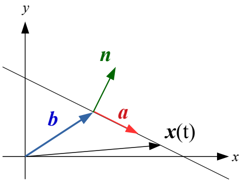
ここまで来たよ

平面上の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{b}$ を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \qquad (t \in \mathbb{R})$$



平面上の直線のパラメタ表示 on Mathematica or Wolfram Alpha

```
ParametricPlot[{2,-1}*t + {1,3},{t,-2,2}]
```

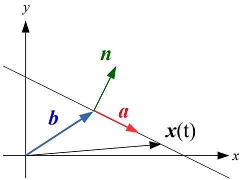
t の範囲はてきとう.

Parametric=パラメタ的な, Plot=グラフを描く

平面上の直線の方程式

考え方 1 $\boxed{\text{B}}$ パラメタ表示で t を消去して

$$\frac{x-c_{\mathrm{x}}}{a_{\mathrm{x}}}=\frac{y-c_{\mathrm{y}}}{a_{\mathrm{y}}}(=t)$$



考え方 2 直線は $\boldsymbol{b}$ を通り法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} a_{\mathrm{y}} \\ -a_{\mathrm{x}} \end{bmatrix}$ と直交する ($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$) から, $\boxed{\text{C}}$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

展開すれば, どちらも, 1 次方程式

$$px+qy=c$$

平面上の直線のパラメタ表示方程式 on Wolfram or Mathematica

```
ContourPlot[1*(x-3)+2*(y-2)==0,{x,-5,5},{y,-5,5}]
```

Contour: 等高線, == 等しい (代入でなく)

L10-Q1

Quiz(平面内の直線の方程式)

1. パラメタ表示が $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ である直線の方程式を求めよう.
2. 方程式が $2x + 3y = 5$ である直線のパラメタ表示をひとつ求めよう.

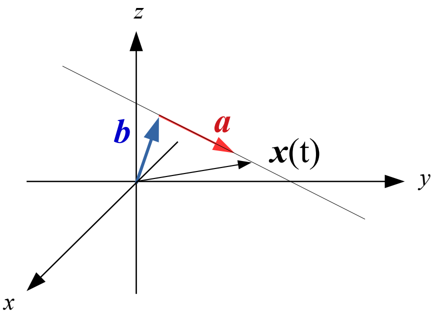
ここまで来たよ

空間内の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{b}$ を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 $\boxed{\text{A}}$と同じ考え方.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

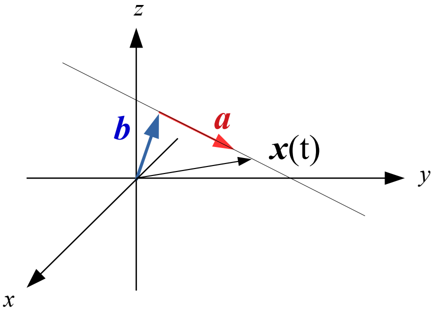
$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \qquad (t \in \mathbb{R})$$



空間内の直線の方程式

考え方 1 $\boxed{\text{B}}$ と同じ考え方パラメタ表示で t を消去して, 2 個の等式

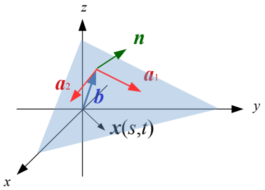
$$\frac{x-b_{\mathrm{x}}}{a_{\mathrm{x}}}=\frac{y-b_{\mathrm{y}}}{a_{\mathrm{y}}}=\frac{z-b_{\mathrm{z}}}{a_{\mathrm{z}}}(=t)$$



ここまで来たよ

空間内の平面のパラメタ表示

平面は $\boldsymbol{b}$ を通り，平面上にベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ がある． $\boxed{\text{A}}$ に似た考え方



$$\boldsymbol{x}(s,t) = \boldsymbol{a}_1 s + \boldsymbol{a}_2 t + \boldsymbol{b} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

ただし，　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$　は定数倍ではいけない．

高橋線形 §4.4 1 次独立

可視化

Mathematica

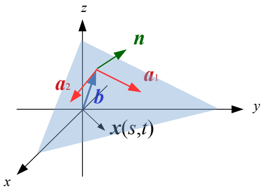
```
ParametricPlot3D[{2,3,5}*s+{1,0,4}*t
           +{-1,5,2},{s,-5,5},{t,-5,5}]
```

空間内の平面のベクトル方程式

$\boxed{\text{C}}$に似た考え方. $\boldsymbol{b}$ を通り, 法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に直交する平面

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}=0$$

$\boldsymbol{n}$ は平面と直交するベクトル (例えば外積 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ として求められる.
展開すると, 1 次方程式



$$px+qy+rz=C$$

可視化

Mathematica

```
1 ContourPlot3D[2*x+3*y+5z==-2,{x,-5,5},{y,-5,5},{z,-5,5}]
```

L10-Q2

Quiz(空間内の平面の方程式)

パラメタ表示 $\boldsymbol{x}(s,t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ で表される平面を考える.

1. 平面に直交するベクトル $\boldsymbol{n}$ をひとつ求めよう.
2. 平面の方程式を求めよう.

ここまで来たよ

9. 略解: 逆行列・3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

10. 3 次元空間の直線と平面
    - 平面上の直線
    - 空間内の直線
    - 空間内の平面
    - 3 次の正方行列の表す線形変換

3 次の正方行列の表す線形変換

3 次の正方行列は, 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の点 (ベクトル)
$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を, 別の点 (ベクトル) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ に写す線形変換を表す.
平面の線形変換 高橋線形 §2.2 と同じのり.
性質

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{0}) =& \mathbf{0} \text{ 原点は原点に写る} \\
f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) =& f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\
f(c\boldsymbol{x}) =& cf(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

直線は直線または 1 点に写される

$$f(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})t + f(\boldsymbol{b})$$

$f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ なら 1 点 $\boldsymbol{b}$, そうでなければ $\boldsymbol{b}$ を通り $f(\boldsymbol{a})$ に平行な直線.
平面は平面または直線または 1 点に写される

$$f(\boldsymbol{a}_1 s + \boldsymbol{a}_2 t + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}_1)s + f(\boldsymbol{a}_2)t + f(\boldsymbol{b})$$

連立 1 次方程式の解空間

3 元連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めるとは,

解空間= $\boxed{A \text{ で写る先が } \boldsymbol{b} \text{ であるような, } \mathbb{R}^3 \text{ の部分集合}}$

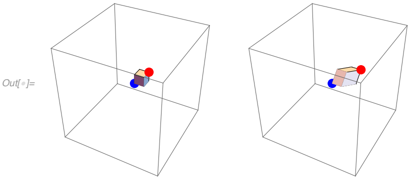
を求めること．それどんな図形?

解空間は階数で分類できる

- $\mathrm{rank}\tilde{A} > \mathrm{rank}A \Leftrightarrow$ 解空間が空集合.
- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A \Leftrightarrow$ 解空間が空集合でない.

階数 $\mathrm{rank}A$	そのときの解
0	空間全体
1	平面
2	直線
3	1 点

例:$\mathrm{rank}A = 3$



$\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$ を 3 辺とする立方体が, $f(\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}), f(\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}), f(\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}})$ を 3 辺とする平行六面体に写る.

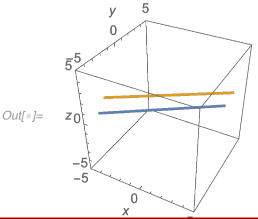
例:$\mathrm{rank}A = 2$

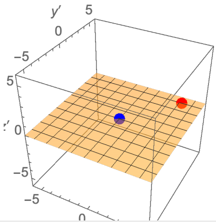
簡約行列にした後 (する前と解は同じ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A = 2$. 任意定数は $3 - \mathrm{rank}A = 1$ 個.
解空間は, 直線 (のパラメタ表示).

$$\begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= 5 - 3t \\ z &= t \end{cases} \text{つまり } \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$





左の青い直線が右の青い点 (原点) に,
左の赤い直線 (解空間) が右の赤い点 (${}^t[4,5,0]$) に,
左の空間全体が右の茶色の平面に写る.

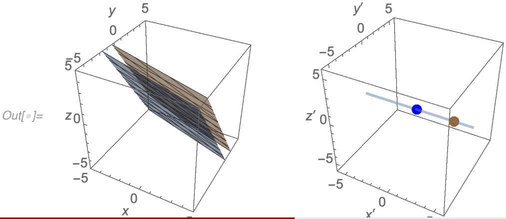
例 2:rank$A = 1$

簡約行列にした後 (する前と解は同じ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A = 1$. 任意定数はは $3 - \mathrm{rank}A = 2$ 個. $\rightsquigarrow$ 平面.
解空間は, 平面 (のパラメタ表示).

$$\begin{cases} x &= 4 - 3s - 2t \\ y &= s \\ z &= t \end{cases} \quad \text{つまり } \boldsymbol{x}(s,t) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$



左の青い平面が右の青い点 (原点) に,
左の茶の平面 (解空間) が右の茶の点 ($^t[4,0,0]$) に,
左の空間全体が右の茶色の直線に写る.

数式処理で簡約行列

Mathematica で簡約行列 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \to ?$ Row=行 Reduce=簡約する

RowReduce on Wolfram or Mathematica

```
RowReduce[{{1,2},{3,4}}]
```

Mathematica で逆行列 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}$ Inverse = 逆

逆行列 on Wolfram or Mathematica

```
Inverse[{{1,2},{3,4}}]
```

連絡

- 前期到達度テスト (数学) `https://maple.st.ryukoku.ac.jp`
- 来週 2019-07-08 月 4 補講 (ふつうと同じのりです)
    - Trial
- 来週 2019-07-09 火 3 ふつう
- 2019-07-16 火 3 ふつう
- 2019-07-23 火 3 授業+テスト 2a
- 2019-07-30 火 3 テスト 1b+2b

線形代数 LINE
公式アカウント

`http://nav.cx/e27GnWk`

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.
検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201`

`https://maple.st.ryukoku.ac.jp/`

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下