行列式

樋口さぶろお　`https://hig3.net`

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L11(2019-07-08)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-08 Mon 17:17 JST hig"

今日の目標

- 3 次の行列式を計算できる
- 行列式を行基本変形で計算できる

L10-Q1

Quiz 解答:平面内の直線の方程式

1. t を消去して $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1}$.
2. $x = t$ とおいて,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{5-2t}{3} \end{bmatrix}$$

L10-Q2

Quiz 解答:空間内の平面の方程式

1. $$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$
2. $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$ を書くと

$$-5(x-1) - 4(y-2) + 6(z-3) = 0.$$

L10-Q3

TA Prob and Sol:空間内の直線の方程式

係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ に対して, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間を求めよう. それは 1 点?直線?平面?空間全体? パラメタ表示または方程式で答えよう.

略解

拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ の

簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

解空間は, $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示される直線.

この直線の方程式は

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

コメント

ここまで来たよ

10. 略解: 3 次元空間の直線と平面

11. 行列式
    - 2 次,3 次の行列式
    - 行基本変形と行列式

2 次の行列式について知ってること 高橋線形 §2.3(p.34)

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

n 次の行列の記法 $a_{\text{行列}} = a_{\text{上から左から}}$

n 次の行列式の記法 $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix}$.

2 次の行列式の用途 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

2 次の行列式の性質

- $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ に逆行列 A^{-1} がない
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ に逆行列 A^{-1} がある 高橋線形定理 3.4(p.49) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank} A = 2$ $\Leftrightarrow A$ が正則行列 高橋線形 §4.4(p.85) $\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に一意的な解がある
- $\det A = 0$, $\det A \neq 0$ という性質は, 行基本変形をしても変わらない 高橋線形定理 3.2(p.46)
- $|AB| = |A||B|$ 高橋線形定理 5.6 を先取り

$\boxed{\det \neq 0 \text{ は計算しやすい判定条件}}$

n 次の行列式

${}_n\mathrm{P}_k = n$ 個から k 個を選んで並べる場合の数.
${}_n\mathrm{P}_n = n! = (n$ 個を並べる場合の数) (順列=permutation).
${}_3\mathrm{P}_3 = 3! = 6$. $123, 231, 312, 213, 132, 213$ の 6 個.
実は n 次の行列式は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 項からなる.
定義より次のようになる. 高橋線形式 (5.2) (p.98)

偶置換 $n!/2$ 個　　奇置換 $n!/2$ 個

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{12} \quad - a_{12}a_{21}.$$

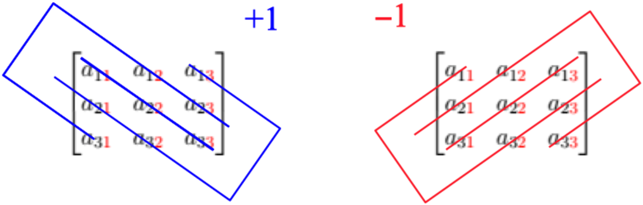
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + (10\text{ 項}) - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - (10\text{ 項})$$

- 順列だから, 1 項の中に 同じ赤い数は出てこない.
- 赤い数のペアを入れ替えると符号は逆になる.
  - 符号は実は互換の回数の偶奇で決まる 高橋線形 sgn(p.96)

3 次の行列式の定義のおぼえ方 (サラスの公式)

高橋線形 p.99



大注意 4 次 (以上) のときは成立しない.

仮に成立するなら正が 4 項, 負が 4 項だが, 実際は $12!/2 = 12$ 項ずつ.

行列式の計算方針 1

$2 \times 2, 3 \times 3$ ならサラスの公式を使う (4×4 以上には使えない)

L11-Q1

Quiz(サラスの公式による 3 次正方行列の固有多項式)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 7 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ に対して, 行列式 $\det(A - \lambda E)$ を計算しよう.

L11-Q2

Quiz(サラスの公式による行列式)

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ を計算しよう.

高橋線形問題 5.4(1)(2)(3)

ここまで来たよ

10 略解: 3 次元空間の直線と平面

11 行列式
- 2 次,3 次の行列式
- 行基本変形と行列式

n 次の行列式の性質

行基本変形のもとでの行列式の変化 高橋線形定理 5.3 高橋線形定理 5.5

操作 I ある行を c 倍すると行列式は c 倍 ($c=0$ も成立だけど役立たず)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = c \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行列全体を c 倍すると行列式は c^n 倍

操作 II ある行に別の行の c 倍を加えても行列式の値は変わらない

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

操作 III 2 行を入れ替えると行列式は (-1) 倍

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

説明用紙

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

転置行列の行列式は同じ 高橋線形定理 5.2(iv)(p.100)

$|{}^{\mathrm{t}}A| = |A|$.

高橋線形問題 5.9 高橋線形演習問題 5.1

列基本変形のもとでの行列式の変化 高橋線形定理 5.2

列についても行と同じ.

操作 II の順を追った説明 高橋線形定理 5.3 高橋線形定理 5.4

- ある行ベクトルが和になってたら，行列式の和になる
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ (b_{i1}+c_{i1}) & (b_{i2}+c_{i2}) & (b_{in}+c_{in}) \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$
- 2 行を入れ替えると行列式は (-1) 倍
- 同じ行が 2 行以上あったら行列式は 0
- ある行に別の行の c 倍を加えても行列式の値は変わらない

列についても同様. 高橋線形問題 5.6 高橋線形問題 5.7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

行列の積の行列式 $\boxed{\text{高橋線形 §5.3}}$

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

階段行列・三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & * \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1n-1} & * \\ 0 & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

行列式の計算方針 2

行基本変形で, 係数 c, -1 を記録しつつ階段行列に持っていく.

$$\text{行列式} = (\text{対角成分の積}) \times (\text{使った係数 } c,\ -1 \text{ すべての積}).$$

L11-Q3

Quiz(行基本変形による行列式)

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -4 & 72 \\ 4 & -10 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 88 \end{bmatrix}$ に対して, 行列式 $\det A$ を計算しよう.

https://register.math.ryukoku.ac.jp/linalg/

L11-Q4

Quiz(行列式が 0 である行列)

次の行列式を求めよう.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -8 & 8 \\ 1 & 9 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Mathematica で行列式

行列式の計算方針 3

ハイテク:余因子展開 高橋線形 §5.4 を使う．成分 0 が多いとき特に有効.

行列式の計算方針 4

Mathematica, Wolfram Alpha を使う

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Mathematica で行列式

行列式 on Wolfram or Mathematica

```
m={{1,2},{3,4}}  (*代入*)
MatrixForm[m]  (*確認*)
Det[m]  (*Determinant=行列式*)
Det[{{1,2},{3,4}}]  (*直接も可*)
```

連絡

- 前期到達度テスト (数学) `https://maple.st.ryukoku.ac.jp`
- 2019-07-09 火 3 ふつう
- 2019-07-16 火 3 ふつう
- 2019-07-23 火 3 授業+テスト 2a
- 2019-07-30 火 3 テスト 1b+2b

線形代数 LINE
公式アカウント

`http://nav.cx/e27GnWk`

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.
検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201

https://maple.st.ryukoku.ac.jp/

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下