n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L12(2019-07-09)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-09 Tue 17:49 JST hig"

今日の目標

- n 次正方行列の固有値固有ベクトルを求められる
- n 次正方行列を対角化できる (対角化可能な場合に)

L11-Q1

Quiz 解答:サラスの公式による 3 次正方行列の固有多項式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -7 & 0 \\ 7 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 5 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)-7(-7)(4-\lambda)-5(-5)(2-\lambda).$$

L11-Q2

Quiz 解答:サラスの公式による行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = 0.$$

行基本変形で階段行列に変形すると rank が 2 であることからもわかる.

L11-Q3

Quiz 解答:行基本変形による行列式

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -4 & 72 \\ 4 & -10 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 88 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}:\boxed{2}+(-2)\times\boxed{1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -8 & -4 & 72 \\ 0 & 6 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 88 \end{vmatrix} \overset{\boxed{3}:\boxed{4},\boxed{4}:\boxed{3}}{=} (-1)\times \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

L11-Q4

Quiz 解答:行列式が 0 である行列

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -8 & 8 \\ 1 & 9 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -6 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{転置}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \\ -4 & -8 & -2 & -6 \\ 1 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \overset{\boxed{3}:\boxed{3}\times(-\frac{1}{2})}{=} (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{同じ行}}{=} 0.$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}:\boxed{2}+(-2)\times\boxed{1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{4}:\boxed{4}+(-5)\times\boxed{3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot (-24) = 72.$
3. 0. 最初から上三角行列で, (4,4) 成分が 0.
4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \overset{\boxed{4}:\boxed{4}+(-3)\times\boxed{2}}{=} \cdots \overset{\boxed{4}:\boxed{4}+(-5)\times\boxed{3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

5. 転置すると上三角行列. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 = 144$.

操作 II の順を追った説明 高橋線形定理 5.3 高橋線形定理 5.4

- ある行ベクトルが和になってたら，行列式の和になる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ (b_{i1}+c_{i1}) & (b_{i2}+c_{i2}) & (b_{in}+c_{in}) \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 2 行を入れ替えると行列式は (-1) 倍
- 同じ行が 2 行以上あったら行列式は 0

操作 II ある行に別の行の c 倍を加えても行列式の値は変わらない

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

ここまで来たよ

11 略解: 行列式

12 n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化
- 行列式と逆行列
- 固有値固有ベクトル
- n 次正方行列の対角化

行列式と逆行列式・同次連立 1 次方程式の解

高橋線形定理 5.8(p.118)

n 次正方行列 A について次は互いに同値.

- A は正則行列
- A^{-1} が存在する
- $\mathrm{rank} A = n$
- $\det A \neq 0$

$n = 2$ のときはすでに知ってた.
行基本変形で $\det \neq 0$ が変わらない, $\det E = 1$ からわかる.

高橋線形定理 5.9(p.119)

さらに次も同値.

- 同次の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だけ

行列の積の行列式 高橋線形 §5.3

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

ここまで来たよ

11 略解: 行列式

12 n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化

- 行列式と逆行列
- 固有値固有ベクトル
- n 次正方行列の対角化

固有値固有ベクトルの定義の復習 高橋線形 §6.1 線形代数 (2019)L04

固有値固有ベクトルの定義 高橋線形 §3.2(p.51)

正方行列 A に対して,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たす数 λ を A の固有値 eigenvalue , ベクトル $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトル eigenvector という (ただし $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の時だけ考える).

固有値の求め方

A:n 次正方行列
固有値固有ベクトルの定義を書くと, ($n=2$ と同じ. 線形代数 (2019)L04)

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \lambda E\boldsymbol{x} \\ (A-\lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ な解があるためには 固有多項式 $\det(A-\lambda E)$ が 0 になる必要がある.

固有値の求め方

n 次正方行列 A の固有値は, 固有方程式

$$\det(A-\lambda E)=0$$

を解くと求まる.

n 次方程式なので, 解は (重根をこめて) n 個あるはず.

固有ベクトルの求め方

固有ベクトルの求め方

A:n 次正方行列の, 固有値 λ に対応する固有ベクトルは, 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

すなわち

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解くと求まる.

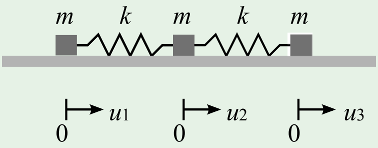
$\det(A - \lambda E) = 0$ なので, 非自明解 (=無限個の解) があるはず.

高橋線形問題 6.1 | 高橋線形演習問題 6.1

L12-Q1

Quiz(3 質点の連成振動)

図のように 2 つのばね (ばね定数 k) で結ばれた質量 m の 3 質点が, 一直線上で運動している. 時刻 t における位置 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ は, それぞれの質点のつりあいの位置 (ばねがともに自然長になる位置) から測ったものである.



1. x_1, x_2, x_3 について運動方程式をたてよう.
2. 固有振動数を求めよう.
3. 固有モード (固有ベクトル) を求めよう.

運動方程式は,

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 &= +k(x_2-x_1) \\
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 &= -k(x_2-x_1)+k(x_3-x_2) \\
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_3 &= \qquad\qquad\qquad -k(x_3-x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

ここまで来たよ

11 略解: 行列式

12 n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化

- 行列式と逆行列
- 固有値固有ベクトル
- n 次正方行列の対角化

n 次正方行列の対角化

高橋線形定理 6.3

n 次正方行列 A のすべての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が相異なるとき，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ から作った正則行列

$$P = [\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n]$$

により，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と対角化される ($n = 2$ と同じ)

高橋線形問題 6.2　高橋線形演習問題 6.4

高橋線形定理 6.4

固有方程式に重解があるときも, 固有ベクトルが n 個あれば同様に対角化できる.

λ が固有方程式の m 重解のとき, パラメタは 1 個以上 m 個以下でてくる (λ の固有ベクトル全体 (と $\mathbf{0}$) は, 直線と限らず, 平面, 空間, ...) になることもある.

n 個未満しかなくて, 対角化できないことがある → Jordan の標準形. 高橋線形 §3.4,§6.3

高橋線形問題 6.3

L12-Q2

Quiz(対角化)

行列 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化できるならしよう.

高橋線形問題 6.3(3)

L12-Q3

Quiz(対角化)

行列 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化できるならしよう.

高橋線形問題 6.3(2)

Mathematica で固有値固有ベクトル

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

固有値固有ベクトル on Wolfram or Mathematica

```
m={{1,2,3},{3,4,5},{5,6,7}}  (*代入*)
MatrixForm[m]  (*確認*)
Eigensystem[m]  (*Eigen=固有*)
(*出力*)
{{固有値1,固有値2,固有値3},{固有ベクトル1,固有ベクトル2,固有
```

行列の積 on Wolfram or Mathematica

```
{{1,2},{3,4}} . {{5,6},{7,8}}
```

高次方程式の解, 因数分解 on Wolfram or Mathematica

```
Solve[x^3-6*x^2+11*x-6==0,x]  (* xについて解を求める *)
Factor[x^3-6*x^2+11*x-6]  (* 因数分解する *)
```

連絡

- 紙のレポート 6.2.02 on Maple T.A. 実習室の Chrome で表示, 印刷 (計算機基礎実習テキスト p.35) して, 紙に手書き解答して提出. 2019-07-16 火 3 授業の際, またはそれ以降 2019-07-22 月 19:00 までに 1-507 前レポート提出箱に.
- 前期到達度テスト (数学) `https://maple.st.ryukoku.ac.jp`
- 2019-07-16 火 3 ふつう
- 2019-07-23 火 3 授業+テスト 2a 出題計画は 2019-07-17 水に確定しますが, 仮に (n 元, $n \times m$ 行列, n 次正方行列で)
  - 行基本変形で簡約行列にする, 階数を求める
  - 行基本変形で n 元 1 次方程式を解く
  - 逆行列を求める
  - 行列式を計算する
  - 固有値固有ベクトルを求める 対角化する
  - ??
- 2019-07-30 火 3 テスト 1b+2b

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.

検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201`

線形代数 LINE 公式アカウント
`http://nav.cx/e27GnWk`

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下