行列式と線形独立・線形従属・基底

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L13(2019-07-16)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-16 Tue 18:51 JST hig"

今日の目標

- 行列式と体積, 体積拡大率の関係を説明できる
- 基底かどうか判定できる, ベクトルを基底の線形結合として書ける 高橋線形 §5.8

L12-Q1
固有値は, $\lambda = 0, 1, 3$. 各固有値に対応する固有ベクトルは
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
L12-Q2
Quiz 解答:対角化
固有方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ を解いて, 固有値は, $\lambda = 3$(2 重解), 1.
$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

を解いて, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$.
$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは,

$$A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$$

を解いて, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t (s, t \in \mathbb{R}, (s, t) \neq (0, 0))$.

よって, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ により, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ と対角化される.

L12-Q3

Quiz 解答:対角化

固有方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ を解いて, 固有値は, $\lambda = 3, 2$(2 重解).
$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは,

$$A\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$$

を解いて, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$.
$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは,

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$$

を解いて, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t(t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$
固有ベクトルが (定数倍を除いて)2 個しかないので対角化できない.

ここまで来たよ

12 略解: n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化

13 行列式と線形独立・線形従属・基底
- 体積・拡大率としての行列式
- 3 次元の回転行列とオイラー角
- 基底チェッカーとしての行列式

2 次正方行列の行列式と面積・拡大率

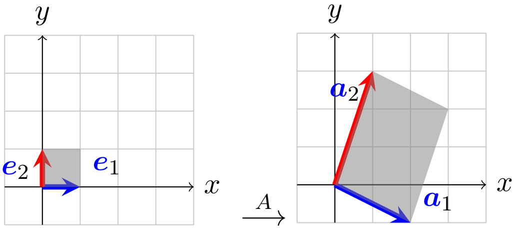
2 次正方行列 A, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A の表す線形変換 f は, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に写す. 例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
$\mathbb{R}^2$ で, 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形

$$\{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 | 0 \leq c_i \leq 1\}$$



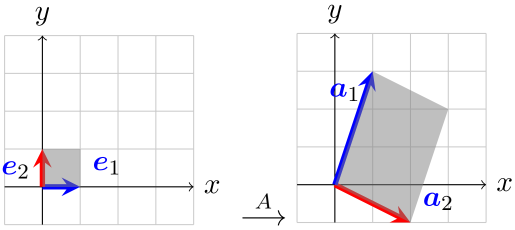
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}_1| \times |\boldsymbol{a}_2| \sin\theta =& \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2 \times |\boldsymbol{a}_2|^2 (1 - \cos^2\theta)} \\
=& \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})} \\
=& |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.
\end{aligned}$$

f の拡大率は $\det A = 7$.

裏返しになるとき

例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.



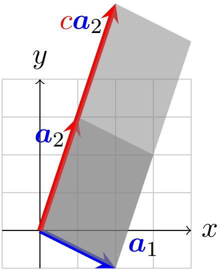
f の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), $\det A < 0$.
平行四辺形の面積は $|\det A| = 7$.

$\boxed{\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \text{ は, } \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \text{ を 2 辺とする平行四辺形の符号付き面積}}$

行列式の性質の図形的説明

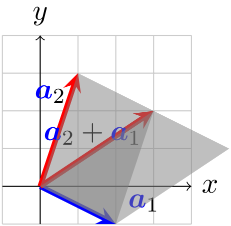
操作 I で $c=2$ 倍

$$\det\begin{bmatrix} 2 & c\cdot 1 \\ -1 & c\cdot 3 \end{bmatrix} = \det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ c\cdot 1 & c\cdot 3 \end{bmatrix} = c\times\det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = c\times 7$$



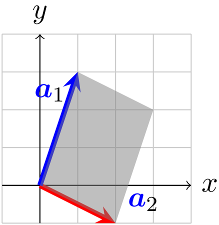
操作 II でかわらない

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3+2 \\ -1 & 1+(-1) \end{bmatrix} = \det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3+2 & 1+(-1) \end{bmatrix} = \det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 7$$



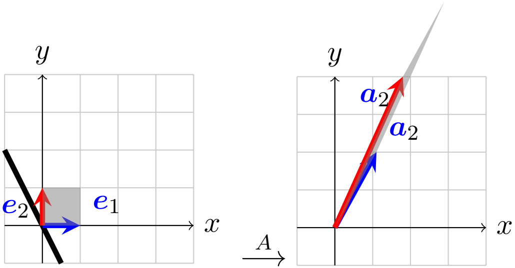
操作 III で (-1) 倍

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\times\det {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7$$



写すと平行四辺形がつぶれるとき

$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0.$



黒い直線が連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解.
面積=拡大率=0.

3 次の行列式

$\mathbb{R}^3$ で, 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_3$ を 3 辺とする平行六面体

$$\{c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3 | 0 \le c_i \le 1\}$$

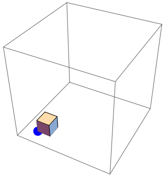
その体積は, スカラー 3 重積

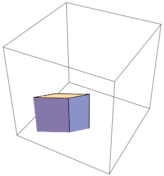
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} a_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_\mathrm{y}c_\mathrm{z} - b_\mathrm{z}c_\mathrm{y} \\ b_\mathrm{z}c_\mathrm{x} - b_\mathrm{z}c_\mathrm{z} \\ b_\mathrm{x}c_\mathrm{y} - b_\mathrm{y}c_\mathrm{x} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_\mathrm{x} & b_\mathrm{x} & c_\mathrm{x} \\ a_\mathrm{y} & b_\mathrm{y} & c_\mathrm{y} \\ a_\mathrm{z} & b_\mathrm{z} & c_\mathrm{z} \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{abc}]$$

の絶対値. 高橋線形 §5.5 式 (5.12)

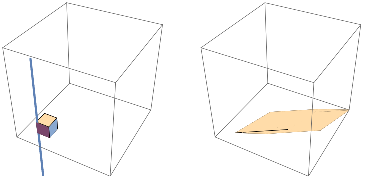
実は, n 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は $\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする n 次元の ‘平行六面体’ の符号付き体積.

$A = [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3]$ の表す線形変換で,
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}_1$ に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}_2$ に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}_3$ に写る.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を 3 辺とする平行六面体, またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は線形変換の拡大率 (裏返しなら負).
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
$\det A = 9$

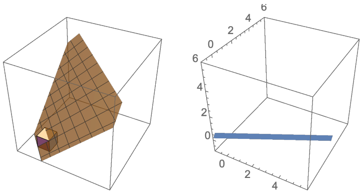




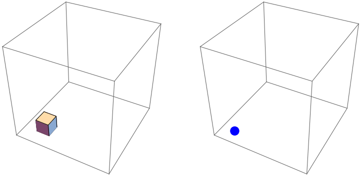
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det A = 0$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det A = 0$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det A = 0$$



L13-Q1

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.
写した先の平行六面体の体積を求めよう.

L13-Q2

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.
写す前後の平行六面体の体積の比を求めよう.

余因子展開

$$\det[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

ってことは…

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} &= a_x \det \begin{bmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{bmatrix} + a_y \det \begin{bmatrix} b_z & c_z \\ b_x & c_x \end{bmatrix} + a_z \det \begin{bmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{bmatrix} \\ &= a_x \det \begin{bmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{bmatrix} + a_y \times (-1) \det \begin{bmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{bmatrix} + a_z \det \begin{bmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1 列目に関する余因子展開 高橋線形 §5.4

実は n 次元の行列式で成立.

次元の低い行列式に帰着できる.

転置, 行入替, 列入替を考えると, やりたい放題.

L13-Q3

Quiz(余因子展開)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = ?$$

ここまで来たよ

12 略解: n 次正方行列の固有値固有ベクトル・対角化

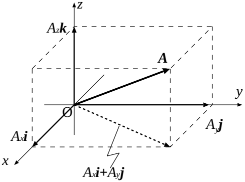
13 行列式と線形独立・線形従属・基底
- 体積・拡大率としての行列式
- 3 次元の回転行列とオイラー角
- 基底チェッカーとしての行列式

3 次元空間内の回転

2 次元の回転行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

z 軸を回転軸とする xy 空間内の回転 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

x 軸を回転軸とする yz 空間内の回転 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$



L13-Q4

Quiz(体積拡大率)

y 軸を回転軸とする, xz 平面内の角 θ の回転の線形変換を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の θ にするかは自由に決めてよい.

3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ θ
3 次元の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$
\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

`http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html`

ここまで来たよ

基底の定義

基底 高橋線形 §5.8

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルの順序付き n 個組 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ が基底 basis であるとは,
任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ を,

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

の形の線形結合で表せて, $c_1, \ldots, c_n$ が一通りに定まること.

線形結合 (1 次結合) linear combination 高橋線形 §4.2

$\boldsymbol{R}^n$ の順序付きのベクトルの組 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に 係数
$c_1, c_2, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$ をかけて加えた形 (のベクトル)

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

を, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の 線形結合 (1 次結合) という.

基底の使い道

基底は, 力学のりでいう「別の座標系」を定める.

対角化とは, 固有ベクトルの組を基底として行列 (線形変換) を見直す (すると簡単になる) こと.

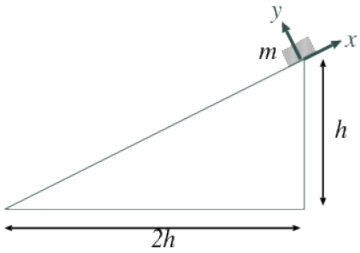
線形代数 (2019)L06

実は, ベクトルを一斉に P^{-1} で写した (座標を取り替えた=基底を別のものに変更した) とき, 線形変換 A でどう見えるか, というのが

$$P^{-1}\boldsymbol{x}' = AP\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = (P^{-1}AP)\boldsymbol{x}$$

という対角化の時に出てくる形 (線形代数 (2019)L04).



基底の判定

行列式による基底の判定

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルの n 個組 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ について,
$\det[\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n] \neq 0 \Leftrightarrow$ 基底である.

$\Rightarrow$ 方向だけの説明

$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$ とかけるなら,

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{y}$$

3 次元の場合, det の正負は, 右手系, 左手系に対応する.

対角化できる/できない行列とは, 固有ベクトルで基底を作れる/作れない 行列

L13-Q5

Quiz(基底)

次の組は $\mathbb{R}^n$ の基底か?

1. $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle$
2. $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$
3. $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$
4. $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$

L13-Q6

Quiz(基底による表現)

ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を, 基底 $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ の線形結合で書こう.

高橋線形問題 5.23

連絡

- 紙のレポート 6.2.02 on Maple T.A. 実習室の Chrome で表示, 印刷 (計算機基礎実習テキスト p.35) して, 紙に手書き解答して提出. 2019-07-16 火 3 授業の際, またはそれ以降 2019-07-22 月 19:00 までに 1-507 前レポート提出箱に.
- 前期到達度テスト (数学)`https://maple.st.ryukoku.ac.jp` –2019-07-19 金
- おすすめのテスト準備: Trial, 練習問題が滑らかにできるように.
- 2019-07-23 火 3 授業+紙のテスト 2a 出題計画は 2019-07-16 水に確定. (n 元, $n \times m$ 行列, n 次正方行列で)
  - 行基本変形で簡約行列にする, 階数を求める (Trial L09 2)
  - n 元 1 次方程式の拡大係数行列の簡約行列から, 解を導く (Trial L09 1)
  - 逆行列を行基本変形で求める (Trial L10 1)
  - 行基本変形で行列式を計算する (Trial L12 2)
  - 3 次元ベクトルの内積 外積 スカラー 3 重積を計算する (L10 2, Trial L11 1)
  - 固有値を求める 固有ベクトルを求める 対角化する (Trial L13)
  - 基底かどうか判定, ~~ベクトルを基底の線形結合で書く~~ (Trial なし, 練習問題のみ)
- 2019-07-30 火 3 テスト 1b+2b

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.

検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201`

サポート

線形代数 LINE 公式アカウント
`http://nav.cx/e27GnWk`

行基本変形アプリ
`https://bit.ly/rrmatrix`

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下