3 次元の回転行列とオイラー角

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数 L14(2019-07-23)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-23 Tue 07:32 JST hig"

今日の目標

- オイラー角の意味が説明できる

L13-Q1

Quiz 解答:体積拡大率

$\det A \times \det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 = 660.$

L13-Q2

Quiz 解答:体積拡大率

$\det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 51.$ よって, $1 : 51.$

L13-Q3

Quiz 解答:余因子展開

$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{操作 III}}{=} (-1) \times \det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{転置}}{=} (-1) \times \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{余因子展開}}{=}$
$(-1) \times 4 \times (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = (-1) \times 4 \times (-1) \times (1 \cdot 7 - 5 \cdot 3).$

L13-Q4

L13-Q5

Quiz 解答:基底

$\mathbb{R}^2$ の基底は 2 個組.

1. $\det = 0$ なので基底でない.

2. $\det = 0$ なので基底でない．
3. 2 個組で $\det \neq 0$ なので基底．
4. 3 個組なので基底でない.

ここまで来たよ

13 略解: 行列式と基底

14 3 次元の回転行列とオイラー角

- 基底チェッカーとしての行列式
- 3 次元の回転行列とオイラー角

基底の定義

基底 高橋線形 §5.8

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの順序付き n 個組 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ が基底 basis であるとは，任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ を，

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

の形の線形結合で表せて，$c_1, \ldots, c_n$ が一通りに定まること．

線形結合 (1 次結合) linear combination 高橋線形 §4.2

$\mathbb{R}^n$ の順序付きのベクトルの組 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に 係数 $c_1, c_2, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$ をかけて加えた形 (のベクトル)

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

を，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の 線形結合 (1 次結合) という．

基底の使い道

基底は, 力学のりでいう「別の座標系」を定める.

対角化とは, 固有ベクトルの組を基底として行列 (線形変換) を見直す (すると簡単になる) こと.

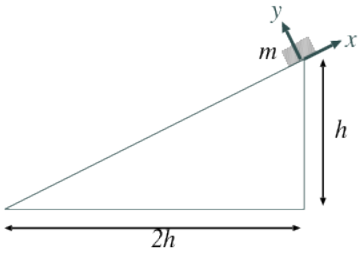
線形代数 (2019)L06

実は, ベクトルを一斉に P^{-1} で写した (座標を取り替えた=基底を別のものに変更した) とき, 線形変換 A でどう見えるか, というのが

$$P^{-1}\boldsymbol{x}' = AP\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = (P^{-1}AP)\boldsymbol{x}$$

という対角化の時に出てくる形 (線形代数 (2019)L04).



基底の判定

行列式による基底の判定

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの n 個組 $\langle \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ について,
$\det[\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n] \neq 0 \Leftrightarrow$ 基底である.

$\Rightarrow$ 方向だけの説明

$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$ とかけるなら,

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{y}$$

3 次元の場合, det の正負は, 正=右手系, 負=左手系に対応する.

対角化できる/できない行列とは, 固有ベクトルで基底を作れる/作れない 行列

L14-Q1

Quiz(基底による表現)

ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を, 基底 $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ の線形結合で書こう.

高橋線形問題 5.23

ここまで来たよ

13 略解: 行列式と基底

14 3 次元の回転行列とオイラー角

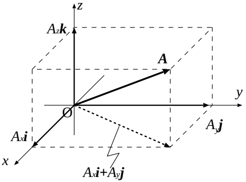
- 基底チェッカーとしての行列式
- 3 次元の回転行列とオイラー角

3 次元空間内の回転

2 次元の回転行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

z 軸を回転軸とする xy 空間内の回転 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

x 軸を回転軸とする yz 空間内の回転 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$



L14-Q2

Quiz(体積拡大率)

y 軸を回転軸とする, xz 平面内の角 θ の回転の線形変換を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の θ にするかは自由に決めてよい.

3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ θ
3 次元の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$
\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html

連絡

- おすすめの期末試験準備: テスト 1a, 2a, Trial, Moodle の練習問題=Maple T.A. の問題がなめらかにできるように.
- 2019-07-30 火 3 紙のテスト 1b+2b.
  - 1b,2b の出題計画は 1a,2a と同じです.
  - 2b, 1b の順で行います.
  - 参加は必須ではありません. 一方のみ参加も可能. (テスト 1a,2a の点により各自で判断してください).

科目 100 ピーナッツ
=平常点 30 ピーナッツ
+テスト 70 ピーナッツ [低い方 { 高い方 (テスト 1a, テスト 1b), 高い方 (テスト 2a, テスト 2b)}])
上で, テスト 1a とは, テスト 1a の 100 点満点の点数を 0.7 倍して 70 ピーナッツに換算したものです.
学生さんにとっては,
「テスト 2a 直後にテスト 2a の点数がわかり, 平常点はすでにわかっている」ことが便利なのはわかってますが, テスト 2a をコンピュータから紙に変更した影響で, 点数計算が遅れます.
定期試験前のなるべく早いタイミングで, 次をするように努めます.

- テスト 2a の点数を通知する
- 「平常点 30 ピーナッツのうち何ピーナッツ分は集計が完了し, その分は何ピーナッツ」と通知する.

Moodle で アンケート + 全学授業アンケート + 加点対象の 200 字のレポート

検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201

線形代数 LINE 公式アカウント
http://nav.cx/e27GnWk

行基本変形アプリ
https://bit.ly/rrmatrix

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下