ベクトルの内積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L01(2023-04-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-04-12 Wed 07:03 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3 次元ベクトルの内積が計算できて利用できる

ここまで来たよ

線形代数とは?

到達目標 (アバウト)

- シラバスより
  - 行列の基本的な計算ができる。
  - ベクトルや直線などの図形の移動や拡大縮小が行列で表現できる。
  - 連立 1 次方程式を行列で表現し解くことができる。
- 教科書の前半の問題が何も見ないで楽勝で解ける.
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる.

線形代数とは?

- ベクトルの続き. 2,3 次元でなく n 次元. 行列 (例: $\left[\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&9\end{smallmatrix}\right]$) も.
- 理系の学科はだいたい 1 年でやる.
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提.

数理のカリキュラムの中での線形代数

必修. 後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象,DS, 情報科学ぜんぶで必要.

科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1.
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎朝 9:15–9:25? の小テスト 'Trial' をクリアしていく感じで.
- 次の情報基礎 (木 45) 以降, 連絡は Teams で. チームコード `9frp6jx`
- 次回から `https://hig3.net` → LearnMoodle `https://learn.hig3.net` を使います **(2022 と違います)**
- 毎回出席を前提に進めます. 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で欠席してピーナッツ的に成績的に考慮されたい場合は LearnMoodle から欠席届 (2 週後まで).

相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期火 4 木昼, 1-507 or Teams chat a00010
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), だいたい昼休みは大学院生常駐. 数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

科目の成績ののり

(シラバスより)

100 ピーナツ=小テスト *75* ピーナツ ＋ 平常点 *25* ピーナツ

全学ルールで 60 ピーナッツ以上が合格です (履修要項参照). 成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります.
(詳細)

小テスト *75* ピーナツ=*Trial*=前半 *15* 回 $\times 2+$ 後半 *15* 回 $\times 3.$
平常点 *25* ピーナッツ=*Mobius*+チーム課題+その他

当面ののり数回後からテキスト必須 $\boxed{\text{加藤 線形代数 何ページの式 (99)}}$. それまで配布資料で. `https://hig3.net` からダウンロードできます.

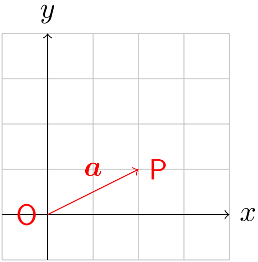
ここまで来たよ

ベクトルの表示

ベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$ のように書く. **細字** a **でなく太字** $\boldsymbol{a}$ **で. 手書きなら 2 重線で.** 成分は縦に並べて (横は別の意味がある). $3, 4, \ldots$ 次元ベクトルも同じ.

始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という.
平行移動して重なるベクトルは同じ.

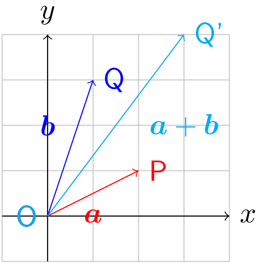
例えば $\mathrm{R}(2,5)$, $\mathrm{S}(4,6)$, なら,
$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$.
2 が x 成分, 1 が y 成分.
教科書では角括弧 bracket [ ]. Web 教材は (). 翻訳して.



ベクトルの和

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$,
$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$
のとき, ベクトルの和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は

OP, OQ を 2 辺とする平行四辺形を作って, もう 1 個の頂点を Q′ とすると, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$



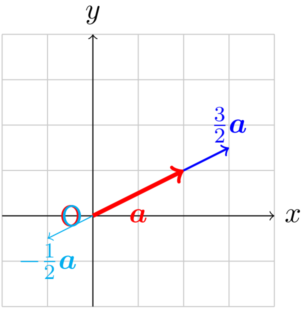
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

ベクトルの定数倍

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\boldsymbol{a}$ は

長さが $\boldsymbol{a}$ の長さの $\lvert k\rvert$ 倍のベクトルで, $k > 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と逆向き (反対向き),	$k\boldsymbol{a} = k\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\cdot k\\1\cdot k\end{smallmatrix}\right]$. $3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに k 倍する.

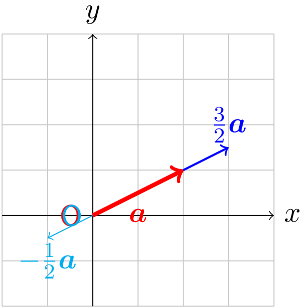
$k = 0$ ならゼロベクトル $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$.



ベクトルの平行

定義 (ベクトルの平行)

零ベクトルでない n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が平行であるとは,
ある実数 k が存在して
$k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とかけることをいう.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は, $k > 0$ なら同じ向き, $k < 0$ なら逆 (の) 向きという.



ここまで来たよ

Mobius で問題演習

https://mobius.st.ryukoku.ac.jp または 龍谷 数学学習サポート で検索

Mobius にログイン. 初回はパスワードリセットが必要. 全学統合認証とは別のパスワードを設定.

フォローアップ課題 (4/19 まで) をやりたくなるけど, ぐっとこらえて線形代数.

数式入力方法

	数式	Mobius(Maple)
ベクトル	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	`<2,-3>`
分数	$\frac{355}{133}$	355/133
平方根	$\sqrt{3}$	sqrt(3)
積	$2\sqrt{3}$	2*sqrt(3)

mobius L00 で入力練習, mobius L01 でベクトルの練習

ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ベクトルの内積
   - ベクトルの表示と演算の復習
   - Mobius で問題演習
   - ベクトルの内積
   - 射影: スカラー射影と正射影ベクトル

ベクトルの内積

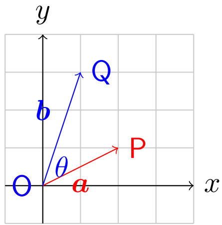
加藤 線形代数 §7

$\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ の長さを $\lvert\boldsymbol{a}\rvert = \sqrt{2^2+1^2}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$ と定義する.	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\times1+1\times3$ のように定義する.

$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ と定義する.

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ をベクトルの絶対値, 長さ という.



内積はスカラー積ともいう.

加藤 線形代数 §7.1では,

内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,

絶対値 $|\boldsymbol{a}|$ をノルム $\|\boldsymbol{a}\|$,

という名前/記号で表している.

単位ベクトル

定義 (単位ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が $|\boldsymbol{a}| = 1$ であるとき, $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであるという.

命題

ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 逆向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.

証明 $\cdots$
直観的説明 $\cdots$

ベクトルの直交

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ が $\pi/2$ であるとき, または, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという.

L01-Q1

Quiz(ベクトルの内積)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ を求めよう.
2. 絶対値 $|\boldsymbol{b}|$ を求めよう.
3. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよう.
4. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ を求めよう.

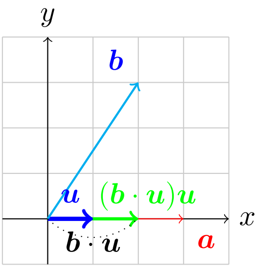
ここまで来たよ

ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

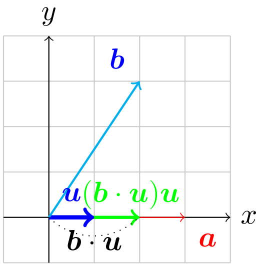
定義 (スカラー射影と正射影ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影とは実数 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = |\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta$. ($\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向き成分ともいう)
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への (正) 射影 (ベクトル) とは
$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = (|\boldsymbol{b}| \cdot 1 \cos\theta)\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$.



命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影である.
  $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}-\boldsymbol{b}$
  つまりこの正射影ベクトルは, $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足で決まるベクトル



$\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影の意味:
敵ゴールポストの向き $\boldsymbol{a}$ に進みたい人にとって, キック $\boldsymbol{b}$ はどのくらい正か負か?

$\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルの意味:
敵ゴールポストの向き $\boldsymbol{a}$ に進みたい人にとって, キック $\boldsymbol{b}$ をゴールポスト向きでいうとどういうベクトルか?

L01-Q2

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ 向きの成分を求めよう.
4. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への射影を求めよう.
5. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向きの成分を求めよう.
6. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよう.

次回

同じ教室. PC 持参.
Trial. 出題計画は…
Mobius で練習しておいてね (最高点が記録). 今回は期限なし.