空間内の直線・平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L05(2023-04-26 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-04-26 Wed 07:18 JST hig"

今日の目標

- 平面上・空間内の直線のパラメタ表示を説明できる
- 法線ベクトルを用いた空間内の平面の方程式が説明できる

L04-Q1

Quiz 解答: ベクトルの射影

東向き単位ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{37}}\begin{bmatrix}-6\\-1\end{bmatrix}$.

ペンギンの移動のベクトル $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ の, 東向きへのスカラー射影を求めて, $\frac{-26}{\sqrt{37}}$.

L04-Q2

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

L04-Q3

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ となる t が存在しないので, 直線上にない.

2. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 29 \end{smallmatrix}\right]$ となる t が存在しないので, 直線上にない.
3. $t = 2$ とすると 、$\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 18 \end{smallmatrix}\right]$ となるので, 直線上にある.

L04-Q4

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

方程式は,

$$\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 0$$

すなわち,

$$3x + y - 22 = 0$$

L04-Q5

Quiz 解答: 直線の方程式と点

1. 代入すると方程式が満たされないので, 直線上にない.
2. 代入すると方程式が満たされるので, 直線上にある.

L04-Q6
Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. 接線ベクトルが $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. これと直交する法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ は法線ベクトル. よってベクトル方程式は
$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$
2. 法線ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. これと直交する接線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ は接線ベクトル. また, 点 $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ は直線上にあることがわかる. よってパラメタ表示は
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

平面上の直線の接線ベクトルと法線ベクトルの関係

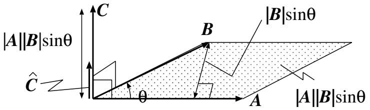
直線と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 直線の法 (線) ベクトル,normal vecvtor という. 直線の向き $\boldsymbol{a}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転して得られる.
助変数, 媒介変数=パラメタ (parameter), 媒介変数表示=パラメタ表示

外積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =$ $\boxed{\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ のはる平行四辺形の面積と向き}}$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張った漁業用網の効率を伝えるもの

- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり $\boxed{\text{平行四辺形の面積}}$ が $\boxed{|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.



空間内または平面内の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

$$\text{すなわち}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \qquad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア)
2D

`https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

3D

`https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M`

ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 空間内の直線・平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

(空間内の) 平面のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.184

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s \\ \text{すなわち} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c} \qquad (t, s \in \mathbb{R}\text{はパラメタ}) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行でない.

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

L05-Q1

Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面を考える．

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面に含まれるか，パラメタ表示から調べよう．
4. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面に含まれるか，ベクトル方程式から調べよう．

(空間内の) 平面の方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を，平面の法 (線) ベクトル normal vector という．平面に平行な (しかし互いに平行ではない)2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとき，外積 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる．

$\boldsymbol{c}$ を通り，$\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ に垂直な平面の方程式 加藤 線形代数 p.184

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = C$$

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと，

$$ax + by + cz = C.$$

2D

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

3D

https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2

L05-Q2

Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう．
2. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう．

直線を境界とする半平面の式

直線

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0$$

は平面を 2 つの半平面に分割する. 各半平面は不等式で指定される.

$\boldsymbol{n}$ と同じ側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}>0$

$\boldsymbol{n}$ と逆の側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}<0$

mobius　L04.2

L05-Q3

Quiz(半平面のパラメタ表示)

$\boldsymbol{c} = \left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$ に平行な直線を考える.

1. ベクトル方程式を求めよう
2. 点 $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-5\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}6\\4\end{smallmatrix}\right]$, がそれぞれ, ($y$ 軸の正の向きを上と思ったとき) 直線の上側, 下側, 直線上にあるか答えよう.

平面を境界とする半空間の式

平面

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

は空間を 2 つの半空間に分割する．各半空間は不等式で指定される．

$$\boldsymbol{n} \text{ と同じ側} \qquad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} > 0$$

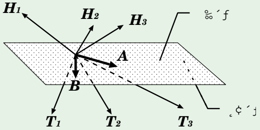
$$\boldsymbol{n} \text{ と逆の側} \qquad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} < 0$$

mobius　L05.2
平面の中の直線, 空間の中の平面が同じ式で扱えることに気づいただろう．これは, どちらも 1 次元減った, 1 次式で書ける集合 (超平面という) だという共通点があるから．

L05-Q4

Quiz(空間内の平面の分ける半空間)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.



1. $|\boldsymbol{b}|$ を求めよう.
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよう.
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよう.
4. $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$ を求めよう.
5. 原点 $\mathbf{0}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方がのる平面は 1 つに定まる. (図では薄く塗られている. それは xy 平面とは異なる). 図は, その平面を斜めから見たものである. ベクトルがこの平面の表裏どちら側を向いているかについて, $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなベクトルを表向き, $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなベクトルを裏向きということにする.
   $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ が表向きか裏向きか考えよう.