行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L09(2023-05-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-05-18 Thu 22:02 JST hig"

今日の目標

- 行列の型と成分と行ベクトル列ベクトルを読み取れる.
- 行列の和とスカラー倍を計算できる
- 行列の積を計算できる

L08-Q1 ちょっと

Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1. $$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2. $$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

行列の積を先に計算してもよい. $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] = R_\pi$ になる.
当然そうなるべきだが，一般に，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる.

L08-Q2

Quiz 解答: 逆写像

1. 実は, 上への 1 対 1 の写像になっている.
$f^{-1}:\mathbb{R}\to\{x|x>0,x\in\mathbb{R}\}$, $f^{-1}:x\mapsto \mathrm{e}^{x}$.
2. g は上への写像ではあるが, 1 対 1 の写像でないので, g^{-1} は存在しない.
3. h は上への写像ではない (1 対 1 の写像ではある) ので, h^{-1} は存在しない.

L08-Q3

Quiz 解答: 逆行列

逆行列 A^{-1} の定義と 2 次の逆行列の公式から,

$$B=A^{-1}=\frac{1}{1\cdot 3-2\cdot 4}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & +\frac{2}{5}\\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

B の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

ここまで来たよ

8 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章 平面と 1 次変換

9 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

◆行列とは

定義 (行列 加藤 線形代数 定義 1-1(p.16))

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を m 行 n 列の 行列 という.

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を A の (i, j) 成分という 加藤 線形代数 p.17

加藤 線形代数 例 1(p.17), 練習 1,2(p.18) mobius K1.1.10

正方行列

定義 (正方行列 加藤 線形代数 p.17)

行列 A が n 行 n 列であるとき, A は n 次の正方行列という.
$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という. 対角成分以外 0 の行列を対角行列という. 加藤 線形代数 §1.3

定義 (行ベクトル, 列ベクトル 加藤 線形代数 p.17)

- n 行 1 列の行列を縦ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 A の第 j 列という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 j 列を m 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を, A の第 j 列ベクトルという 加藤 線形代数 なし mobius
  `<a,b,c>`
- 1 行 m 列の行列を横ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 A の第 i 行という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 i 列を 1 行 n 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ を, A の第 i 行ベクトルという 加藤 線形代数 なし 大
  注意:mobius `<a|b|c>`

加藤 線形代数 例 2(p.18), 練習 3(p.18) mobius K1.1.10
ベクトルは行列の一種だが, mobius では, 1 行 m 列の行列`<<a,b,c>>` と, 列ベクトル (縦ベクトル)`<a,b,c>` を区別する, など.
数 (スカラー) は 1 行 1 列の行列とも見なせるが, mobius での入力は区別する.

ここまで来たよ

8 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章 平面と 1 次変換

9 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, 零行列

- 行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)
  - ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない. 例: 三角形
- 行列の和と差 加藤 線形代数 定義 2-2(p.19)
  - 型が同じ時だけ，行列の間の和と差が定義される
- 行列のスカラー (定数) 倍 加藤 線形代数 定義 2-3(p.19)

ちょっと，前から知ってるベクトルに似てる… ベクトルは m 行 1 列の行列だから．

なるべく行列の変数 A, B, O のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

加藤 線形代数 例 1, 例題 1,2, 練習 1,2(pp.20–21) mobius K1.2.10

零行列, ゼロ行列

定義 (零行列 加藤 線形代数 定義 2-4(p.22))

O (英字大文字)
すべての成分が 0 である行列.
m 行 n 列であることを特に示すときは, O_{mn}.

定理 (零行列を含む行列の和 加藤 線形代数 定理 2-1(p.22))

行列の型があっているとき,
$A + O = O + A$.
$A + (-A) = (-A) + A = A - A = O$.

ここまで来たよ

8 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章 平面と 1 次変換

9 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念
- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

◆行列の積

定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ &= -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ もこの一例と思える.
横ベクトルと行列の積. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.
ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

単位行列

定義 (単位行列 加藤 線形代数 p.24)

n 次の単位行列 E or E_n とは,
n 次正方行列で
(i, j) 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

行列の積の演算法則

定理 (行列の積の演算法則 加藤 線形代数 定理 2-2)

以下, 積の型はあっているとする. A は m 行 n 列とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) && \text{結合法則, 当たり前ではない}\\
A(B+C) &= AB + AC && \text{分配法則 1}\\
(A+B)C &= AC + BC && \text{分配法則 2}\\
AE_n &= E_m A = A && \text{単位行列の性質}\\
AO_{nk} &= O_{mk}, \quad O_{\ell m} A = O_{\ell n} && \text{添字は型}\\
\text{略記} A^n &= \underbrace{AA \cdots A}_{n} && \text{行列のべき乗}
\end{aligned}
$$

結合法則は，行列が 1 次変換を表す場合には納得した.

ほとんどの場合に成立しない=「成立しない」もの

$AB = BA$ 反例 加藤 線形代数 例 5(p.23)

$AB = O$ならば$(A = O$または$B = O)$ 反例 加藤 線形代数 例 9(p.26)

加藤 線形代数 練習 4,5,6(p.27), mobius K1.2.30

実数やベクトルの直観を使わず, 上の法則だけを使う

例 $(AB)^2$

例 $(A - B)(A + B)$

おすすめの勉強方法 I

チーム課題, Trial チーム課題, Trial は，それ以降，それがわかっている前提で進んでいます．正解しなかった場合は Moodle でフィードバックと略解を見て理解してください．さらに mobius　で再練習してください．

教員への質問

- Teams 質問と相談 ch．時刻はいつでも．
- Teams 1:1 chat で．時刻はいつでも．
  - 課程内の教員や学生には，まっとうな内容なら，面識なくてもいきなり chat 送っていい．科目に関することなら科目名書いて．
- Teams or Moodle 匿名質問箱．時刻はいつでも．
- (すべての科目について manaba 個別指導コレクション)
- (すべての教員について オフィスアワー)
  - 教務課左端のドアに部屋，曜講時，メールアドレスの表 (ポータルの 4 月のお知らせにもあります)
  - 勉強関係なら何でも質問しにいっていい．「この課題がわからないんですが」

おすすめの勉強方法 II

教員以外への質問

- Math ラウンジでの大学院生 (含む TA) によるサポート, 平日昼, 1-536, 538, 課程 TM Math ラウンジ ch.
- 数理情報基礎演習での 4 年生によるサポート, 金,3 1-609.

教科書知らない/忘れた用語が出てきたら，巻末の索引で検索しよう．索引は完璧ではないので，書き込んで補おう．

教科書に対応した問題集加藤文元, 大学教養線形代数 (青チャート), 数研出版, 2020.

オンライン (オンデマンド) 授業のお知らせ (2023-05-24 水 1)

授業内容の特性から, また, 今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として, 2023-05-24 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います.

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません.

日時 締切までに動画を視聴して課題を提出すれば，この講時内に活動しなくてもかまいません.

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください.

準備 事前にシステムが使えるかどうか試し練習しておいてください. 2023-05-19 金 (?) にお知らせする予定.