3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L17(2023-06-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-20 Thu 17:12 JST hig"

今日の目標

- 拡大係数行列の簡約階段化を求めて, 連立 1 次方程式が解ける 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

L16-Q1

Quiz 解答: 行基本変形による連立 1 次方程式の解法

1. 略.

2. $$x_1 = 7,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = 5.$$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

過程省略．動画見て．

ここまで来たよ

◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

(解が存在する場合の) 連立 1 次方程式の解き方

簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

1. ピボットのない列 ($\mathbf{0}, *$ になっている列) にかかる未知数を，任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく．任意定数の個数を解の自由度 (degree of freedom) という．
2. ピボットにかかる変数は，これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）．

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 加藤 線形代数 練習 2(p.54)，章末問題 2(p.72) mobius K2.3.10

`https://learn.hig3.net` > 動画 連立 1 次方程式

例 拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

ピボット以外の列 (**0** や $*$ の列) について, $x_1 = c, x_4 = d, x_6 = e$ とおく.

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ 1 \cdot x_2 &= b_1 - 0 \cdot c - 2 \cdot d - 4 \cdot e \\ 1 \cdot x_3 &= b_2 - 0 \cdot c - 3 \cdot d - 5 \cdot e \\ x_4 &= d \\ 1 \cdot x_5 &= b_3 - 0 \cdot c - 0 \cdot d - 6 \cdot e \\ x_6 &= e \end{aligned}$$

同値な書き方. これもできるように.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c, d, e \in \mathbb{R})$$

L17-Q1

Quiz(簡約階段行列から 1 次方程式の解)

変数 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$\tilde{A} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と同値な連立 1 次方程式を，行列を使わずに書こう．
2. 任意定数 $c, d, e, \dots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \quad \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $c, d, e, \dots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 c + \boldsymbol{v}_2 d + \dots$ の形に書こう．

解全体の集合は点?直線?平面?

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (平面上の点)

定義 (連立 1 次方程式の解全体の集合 加藤 線形代数 p.146)

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を考える.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体の集合とは,
$\{\boldsymbol{x} | \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subset \mathbb{R}^n$.

以下, 任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$.
例 1

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 2, 解の自由度 0, 解は一意的, 解全体の集合は 1 点

例 2 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 1, 解の自由度は 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線

例 3 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 0, 解の自由度は 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面

解なしの例

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A の階数はたまたま 1, 解の自由度は定義されない，解なし，解空間は空集

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点)

階数は 3, 自由度 0, 解は一意に定まる, 解全体の集合は 1 点,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} x_1 = & 2 \\ x_2 = & 3 \\ x_3 = & 11 \end{array} \rightsquigarrow 1\text{ 点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

階数は 2, 自由度 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線. 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} x_1 = & 2 - 7c \\ x_2 = & 3 - 9c \\ x_3 = & c \end{array} \rightsquigarrow 1\text{ 直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

階数は 1, 自由度 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面. 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rl} x_1 = & 2 - 5c - 3d \\ x_2 = & c \\ x_3 = & d \end{array} \rightsquigarrow \text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

階数は 0, 自由度 3, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は空間全体.

$$\tilde{A} = O$$

◆解の存在

定理 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
   - (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69) mobius K2.3.30

系 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 系 3-1(p.67))

A を $m \times n$ 行列とする.
$m = \operatorname{rank} A$ ならば
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, 解の自由度は $n - m$.

話し言葉「フルランク」$\Leftrightarrow m = \operatorname{rank} A$
話し言葉「ランク落ち」$\Leftrightarrow m > \operatorname{rank} A$
「フルランクのとき, 変数の個数 $n-$ 方程式の数 m で決まる」

定理と同類の名前

主張の格は, 高いほうから

- ○○定理 ○○ Theorem 特に重要な定理
- 定理 Theorem 重要で著者が特に主張したい命題
- 命題, 主張 Proposition, Assertion 定理ほどは重要じゃない命題
- 事実 Fact 命題と同じだけど, 証明が難しすぎて主張だけいうときによく使われる?
- 系 Corollary 重要かもしれないけど定理から簡単に導ける命題
- 補題, 補助定理 Lemma 定理を証明するために, あらかじめ証明する (技術的な) 命題

数学書のありがちなスタイル. 定義-定理 (や同類のやつ)-証明, 定義-定理 (や同類のやつ)-証明

ここまで来たよ

16 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

17 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

◆同次連立 1 次方程式

定義 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.

定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

英単語自明 (trivial) はいろんな文脈でも登場.「わかりきった」?

定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\mathrm{rank}\, A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\mathbf{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解全体の集合の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解全体の集合が 1 点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解全体の集合が直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50 mobius K2.3.70