逆行列と連立１次方程式 | 第３章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L21(2023-06-28 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-28 Wed 16:39 JST hig"

今日の目標

- 逆行列を用いて連立１次方程式の解を求められる
- 同次方程式を利用できる

L20-Q1

$[A|E]$ を基本変形で簡約階段形にする．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\times 2+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\times(-2)+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times 1+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}\times(-1)+\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}\times(-2)+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって，

$[A|E]$ は簡約階段形 $[E|A^{-1}]$ に基本変形 (省略) できて，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L20-Q2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\times(-2)+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\times(-3)+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\times 1+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

のように階段形にすると, $\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$. よって A は正則でない．

Comment (別解のような考察から) 正則でない見通しが立っていれば, $[A|E]$ でなく A だけを基本変形して階数を求めても十分．階数は簡約階段形までしなくても，階段形になった時点で求められる (階数は (簡約でない) 階段形に対して定義されている).

別解 $B = P_{31}(-1)P_{32}(-1)A$ の 3 行目は ${}^t\mathbf{0}$ なので，
$B = P_{31}(-1)P_{32}(-1)A$ は正則でない．よって，A も正則でない．

正則か？ の判定

ベースは「正則行列の構造」 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

行列 A が正則かどうかの，成分からのいつでも使える判定方法

- 正方行列 (n 行 n 列) であることが大前提．
- 階段形にして，階数 $\mathrm{rank}(A) = n$ なら正則，階数 $\mathrm{rank}(A) < n$(途中で見えちゃうこともある) なら正則でない．

たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら，$\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は正則.
- A にうまく行基本変形して，加藤 線形代数 例題 1，練習 2，練習 3(p.86) の形に持って行けるなら正則でない
- $XA = AX = E$ となる X が見つかれば正則（もともとの定義）
- 加藤 線形代数 §4 になると，行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$は正則 で便利に判定できる

ここまで来たよ

20 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

21 逆行列と連立 1 次方程式 | 第 3 章 行列の構造

- 逆行列と連立 1 次方程式
- 同次連立 1 次方程式

逆行列と連立 1 次方程式

命題 (逆行列を利用した連立 1 次方程式の解)

連立 1 次方程式が，係数行列 A が n 次正則行列，定数項ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書かれるならば，

1. 1 次方程式は解を持ち，解の自由度は 0，解は一意で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$，解空間は 1 点 $\{\boldsymbol{x}_0\}$ である．
2. 解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ である．

命題の長所短所

- ♠ 一般の場合 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) よりも限られた状況 (未知数 n 個=式の個数 n 個，A が正則) 仮定が強い
- ♡ 結論として具体的な解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ の情報が得られている
- ♡ $\boldsymbol{b}$ が変わっても同じ A^{-1} で解が書ける
  - 「$[A|E]$ を簡約階段形にする」，は，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$ を一度に解いているようなものだから，すべての $\boldsymbol{b}$ に対する解をとらえている

命題の (略) 証明

1. 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) で，$m = n$. A が正則なので，加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より $\operatorname{rank} A = n = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$ なので．
2. 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32) より 逆行列 A^{-1} が存在する．左から A,A^{-1} をかけることにより

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

L21-Q1

Quiz(逆行列と連立 1 次方程式)

正則行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で書かれた次の連立 1 次方程式を解こう.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

mobius　K3.3.50

2 元連立 1 次方程式の解

$ad - bc \neq 0$ とする．連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned}$$

の解を求めよう．

Comment $ad - bc = 0$ の場合，解なしの場合や，解が無限にある場合 (中高では「不定」で済ませていた) になる．それを判定するには簡約階段形にする必要がある．

ここまで来たよ

「解を求めよ」の意味

- 「$\boldsymbol{x}_0$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解」$\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$.
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解空間 V とは, すべての解からなる集合
  $V = \{x \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$.
  - $\boldsymbol{x} \in V \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

解を (すべて) 求めよ=解空間を求めよ=一般解を求めよ
（ふつうは任意定数内蔵で）すべての解を表示
表示方法は 1 通りではない．拡大簡約化による解法 加藤 線形代数 例題 3(p.68) では
そのうちの 1 通りが得られる．
解をひとつ求めよ=特殊解を求めよ
$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}_0$ を 1 個見つけよ．
特殊解は複数個ある (のがふつう)(それをぜんぶ集めたのが一般解)

L21-Q2

Quiz(特殊解と一般解)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を考える．

1. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が，連立 1 次方程式の (ひとつの) 解であることを示そう．
2. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を 2 通りに表示しよう．
3. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解を 2 個書こう．

同次連立 1 次方程式

復習

定理 (同次連立 1 次方程式の解 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)**)**

m 行 n 列の係数行列 A を持つ同次連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (**)$$

に対して,

1. $\operatorname{rank} A = n$ ならば (**) は自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ しか持たない.
2. $\operatorname{rank} A < n$ ならば (**) は非自明な (無限個の) 解 $\boldsymbol{x}$ を持つ.

Comment 拡大係数行列 $[A|\mathbf{0}]$ の簡約階段化を求めると，どうせ，$[\tilde{A}|\mathbf{0}]$ となるから，筆算では $|\mathbf{0}$ 部分を省略してよい.

Comment $m = n = \operatorname{rank} A$ のとき, A は正則行列．解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0}$ のみ, で話があっている.

命題

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の 2 つの特殊解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の差 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ は，
対応する同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) のひとつの解.

証明

特殊解とする．つまり，$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$ とする.
すなわち $A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.
$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ は (**) の解.

命題

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) と，対応する同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) を考える．
(*) の一般解任意定数内蔵は，
((*) の特殊解)+((**) の一般解任意定数内蔵)，の形に書ける．

(*) の一般解の定数部分は $A, \boldsymbol{b}$ から，任意定数内蔵部分は A だけから決まる

証明 (この形ならば解)

(*) の特殊解を $\boldsymbol{x}_0$, (**) の解を $\boldsymbol{x}_1$ とする．
$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0}$.
よって，$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ は (*) の解.

証明 (解ならばこの形)

(*) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ を考える．(*) の特殊解を $\boldsymbol{x}_0$ とする．
$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となり，
$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は (**) の解.
よって, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0+$ (**) の解.

L21-Q3

Quiz(特殊解と同次連立 1 次方程式の一般解)

1. 同次連立 1 次方程式
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
の解を求めよう（一般解を求めよう=解空間を求めよう）.
2. 非同次連立 1 次方程式
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
の解をひとつ見つけよう（特殊解を見つけよう）
3. 非同次連立 1 次方程式
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
の解を求めよう（一般解を求めよう=解空間を求めよう）.

mobius　K2.3.90

復習: 掃き出し法 線形代数☆演習 I(2023)L16 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする

(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

掃き出し法 (簡略版)

掃き出し法の概要 (簡略版)

ピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら，行 i で，

1. なるべく近い列を相手にする（下がゼロばかりの列は相手にしない）
2. R1 $i \leftrightarrow j$ でゼロでない成分を行 i にに持ってくる (ピボットにする)
3. R3 $i \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
4. R2 $i \times (-a) + k$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
5. R2 $i \times (-a) + k$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする