4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L27(2023-07-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-19 Wed 08:03 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 余因子展開で計算できる
- 逆行列の公式を説明できる

行列の基本変形と行列式の計算の違い (TrialL25, L26) I

trialL26(レポート) は，Maple の課題で答を知ってからやることことをお奨めします．

ここまで来たよ

◆余因子

今日の動機

- 第 1 行や第 1 列と限らず, ゼロ成分が多い行や列があったときに還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) 的な操作をしたい
  - 基本変形 R1 加藤 線形代数 例題 1(p.123) はひとつの方法
- これに該当しないときも, 強引に行列式の次数を reduce したい

定義 (小行列式と余因子 加藤 線形代数 p.124 加藤 線形代数 定義 4-1(p.125))

A: n 次の正方行列 のとき,
A の (i, j) 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, A から第 i 行, 第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
A の (i, j) 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

(i, j) 小行列式にかけられる符号$=(i, j)$ 余因子に含まれる符号

$$(-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} = \qquad\qquad , \quad \begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} = \qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{加藤 線形代数 例 1, 練習 1(p.124), 例 2, 練習 2(p.125)}}$ mobius 4.4.10

ここまで来たよ

◆行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なもの複数の和として書くこと

定理 (余因子展開 加藤 線形代数 定理 4-1(p.125)**)**

$A=[a_{ij}]$ を n 次の正方行列

$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) 余因子 とするとき,

- $\forall i \quad \det(A)=\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A)=\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 i 行目に行多重線形性を適用する. 交代性を使って, $a_{i\ell}$ を $(1,1)$ に持っていく. この時出る符号は $(-1)^{i-1+\ell-1}$. 還元定理を使う.

加藤 線形代数 例 3, 例題 1(p.127), 練習 4(p.128) mobius 4.4.30 mobius 4.4.50

(i,j) 小行列式にかけられる符号=(i,j) 余因子に含まれる符号 $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. n 項の和になる.
第 3 行についての展開 (., ● はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ {\color{blue}31} & {\color{red}32} & {\color{blue}33} & {\color{red}34} \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = {\color{blue}+31} \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ {\color{blue}\bullet} & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} {\color{red}-32} \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & {\color{red}\bullet} & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} {\color{blue}+33} \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & {\color{blue}\bullet} & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} {\color{red}-34} \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & {\color{red}\bullet} \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & {\color{red}12} & 13 & 14 \\ 21 & {\color{blue}22} & 23 & 24 \\ 31 & {\color{red}32} & 33 & 34 \\ 41 & {\color{blue}42} & 43 & 44 \end{vmatrix} = {\color{red}-12} \begin{vmatrix} . & {\color{red}\bullet} & . & . \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} {\color{blue}+22} \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ . & {\color{blue}\bullet} & . & . \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} {\color{red}-32} \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & {\color{red}\bullet} & . & . \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} {\color{blue}+42} \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ . & {\color{blue}\bullet} & . & . \end{vmatrix}$$

証明の実演 $i=2$ 行目についての余因子展開．右側切れてます．

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\a&b&c&d\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{多重線形性}}{=}\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\a&0&0&0\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\0&b&0&0\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\0&0&c&0\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11\\0\\31\\41\end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{交代性}}{=}(-1)^{i-1}\times\left(\det\begin{bmatrix}a&0&0&0\\11&12&13&14\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&b&0&0\\11&12&13&14\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&0&c&0\\11&12&13&1\\31&32&33&3\\41&42&43&4\end{bmatrix}\right.$$

$$\overset{\text{交代性}}{=}(-1)^{i-1}\times\left((-1)^0\det\begin{bmatrix}a&0&0&0\\11&12&13&14\\31&32&33&34\\41&42&43&44\end{bmatrix}+(-1)^1\det\begin{bmatrix}b&0&0&0\\12&11&13&14\\32&31&33&34\\42&41&43&44\end{bmatrix}+(\right.$$

$$\overset{\text{還元定理}}{=}(-1)^{i-1}\times((-1)^0a\det\begin{bmatrix}12&13&14\\32&33&34\\42&43&44\end{bmatrix}+(-1)^1b\det\begin{bmatrix}11&13&14\\31&33&34\\41&43&44\end{bmatrix}+(-1)^2$$

$$\overset{\text{小行列式の定義}}{=}(-1)^{i+1}am_{i1}+(-1)^{i+2}bm_{i2}+(-1)^{i+3}cm_{i3}+(-1)^{i+3}dm_{i4}$$

$$\overset{\text{余因子の定義}}{=}a\tilde{a}_{i1}+b\tilde{a}_{i2}+c\tilde{a}_{i3}+d\tilde{a}_{i4}$$

$$=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+a_{i3}\tilde{a}_{i3}+a_{i4}\tilde{a}_{i4}.$$

L27-Q1

Quiz(行列式の余因子展開)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, 第 1 行に関して余因子展開しよう.
2. この行列式を, 第 2 列に関して余因子展開しよう.

L27-Q2

Quiz(行列式の還元公式)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 11 \\ 13 & 37 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, 3×3 行列式で書き直そう.

行列式の余因子展開 (一般形)

定理 (余因子展開 (一般形) 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128))

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列,
$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) 余因子とするとき,

- $\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j,k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i=k$ で $\delta_{ik}=1$ となるケースは上で証明した.
$i\neq k$ とする.
A で, k 行目に, i 行目を上書きコピーした行列を B とする.
実は $\det B$=左辺=右辺.
$i\neq k$ と交代性より $\det B=$ 左辺.
$\det B$ の k 行目に関する余因子展開は $\det B=\sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.
コピーの結果 $b_{k\ell}=a_{i\ell}$,
余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ は，$i\neq k$ より，コピーされた部分をはずしてるので,
$\tilde{b}_{k\ell}=\tilde{a}_{k\ell}$.
よって $\det B$ の余因子展開は右辺と一致する.

$$0=\det B=\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$$0 = \det B = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$i \neq k$ の場合の証明の実演

A の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして B を作成.
B を $k = 2$ 行で展開.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 = \det B = \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} &= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}. \end{aligned}$$

ここまで来たよ

余因子行列

$$\forall i, k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$ (i 行目における余因子展開)

動機 $\tilde{a}_{k\ell}$ じゃなくて $\tilde{a}_{\ell k}$ だったら行列の積の形になるのに…

定義 (余因子行列 $\boxed{\text{加藤 線形代数 p.129}}$)

$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列, その余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とする.
A の余因子行列 $\tilde{A} = [b_{ij}]$ を, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である n 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べて，その後で転置したもの.

例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

定理 (余因子展開 (行列形) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129))

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列,
$\tilde{A}$ を A の余因子行列とするとき,

$$\det(A) \times E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128) の和を, 行列の積とみただけ

定理 (逆行列の明示公式 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) の 加藤 線形代数 系 4-1(p.129))

A を n 次の正則行列,
$\tilde{A}$ を A の余因子行列とするとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

計算問題には使わないこと.

例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} =$

$$B = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}, B^{-1} =$$

正方行列について，正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $\neq 0$

定理 (正則行列の特徴づけ 加藤 線形代数 定理 4-4(p.130))

A: n 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) A は正則
(b) $\operatorname{rank} A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

- 証明済
  - (a)⇔(b) 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)
  - (a)⇒(c) 加藤 線形代数 系 2-2(p.118)
- ここで証明
  - (c)⇒ (a) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) より, $\det(A) \neq 0$ なら A^{-1} が存在する.

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト用途:Moodle「成績評価方法」参照.

- 2023-08-02 水 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- Trial L01-15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2023-08-04,05).

成績評価

- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2023-07-26 水 20:00 までに提出.
- Trial L29 の採点結果の公表は，2023-07-28 ごろの予定.