5.2 1 次独立と 1 次従属 | 第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L29(2023-07-26 Wed)

最終更新: Time-stamp: ”2023-07-26 Wed 07:44 JST hig”

今日の目標

- ベクトルの 1 次結合が説明できる
- 部分空間の生成系が説明できる
- 同次連立 1 次方程式の生成系を求められる

L28-Q1
Quiz 解答: ベクトル空間の部分空間の判定

1. ◯ 次の定理の特別な場合
2. × S1 が成立していないなど
3. × S2 が成立していない

L28-Q2
Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える.

1. $\det(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$. 加藤 線形代数 定理 4-4(p.130) より，A は正則で，$\operatorname{rank} A = 2$.
2. 解は $\boldsymbol{v} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 0$. 解全体の集合は 1 点のみからなる $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$.
3. 解の自由度$=n - \operatorname{rank} A = 0$ なので，非自明な解はない．解は自明な解 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のみ. 解空間は原点のみからなる $\{\mathbf{0}\}$.

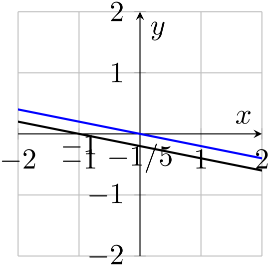
L28-Q3 Moodle に動画

Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える.

1. 拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[①\times(+1)+②]{①\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   rank A = rank $\tilde{A} = 1$ より解をもつ. 解の自由度は $n -$ rank $A = 1$.
   解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$. 解全体の集合は
   $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. (原点を通らない直線)
   直線と y 軸 $x = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, 直線と x 軸 $y = 0$ との交点は
   $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. $\operatorname{rank} A = 1$, 解の自由度 $n - \operatorname{rank} A = 1$ より非自明な解をもつ．解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$. 解空間は $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. (原点を通る直線)



L28-Q4 Moodle に動画

TA Prob and Sol: 連立 1 次方程式の解全体の集合

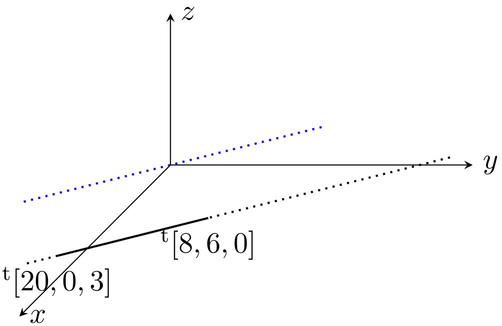
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

とする.

1. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ は非自明な解をもつか? 解の自由度を求めよう. 解空間を求めよう.
2. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 84 \end{bmatrix}$ は解をもつか? もつなら解の自由度を求めよう. 解全体の集合を求め $V = \mathbb{R}^3$ に描こう(Hint: 各平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ との交点を求めよう). 同次の解集合もあわせて描こう.

略解

1. $A \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank} A = 2$. 変数の個数は $n = 3$ より解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1 > 0$ なので非自明な解をもつ．解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$. 解空間は原点を通る直線 $W = \{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R}\}$.
2. 拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 26 \\ 2 & 6 & 4 & 52 \\ 3 & 10 & 8 & 84 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$.
   $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A$ より解をもつ．解の自由度は
   $n - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$. 解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$.
   解全体の集合は直線 $W_0 = \{\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R}\}$.
   W_0 と $x = 0$ との交点は, $t = -2$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$, 同様に $y = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $z = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   同次連立 1 次方程式の解空間 W は，この直線 W_0 と平行で原点を通る直線.


z
y
x
${}^t[8, 6, 0]$
${}^t[20, 0, 3]$

行列式の性質を使ったいろいろな計算

加藤 線形代数 定理 2-4(p.113), 定理 2-7(p.116), 系 2-2(p.118)

Quiz(積と転置と逆の行列式)

A, B を n 次の正方行列とするとき，次を簡単化しよう．

$$AB\det(2\cdot {}^{\mathrm{t}}(A^{-1}B)(AB)^{-1})B^{-1}({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}$$

ここまで来たよ

28 5.1 ベクトル空間と部分空間 | 第 5 章 ベクトル空間

29 5.2 1 次独立と 1 次従属 | 第 5 章 ベクトル空間

- 5.2 1 次独立と 1 次従属
- Wolfram Alpha での行列計算

◆1 次結合

定義 (1 次結合 加藤 線形代数 p.152)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ のとき,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ を「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合 (linear combination)」という.

1 次結合=線形結合

L29-Q1

Quiz(1 次結合)

$V = \mathbb{R}^2$ のベクトルを考える.

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ の, 係数 $a_1 = 3, a_2 = 5$ による 1 次結合 $\boldsymbol{w}$ を求めよう.
2. 上で求めたベクトルを $\boldsymbol{w}$ を, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合として書いたときの係数を求めよう.

系 (1 次結合からなる部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合全体の集合

$$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

は, V の部分空間.

証明 加藤 線形代数 定理 2-1(p.152)

定義 (生成された部分空間 加藤 線形代数 例 1,2, 練習問題 1,2,3(pp.153–154))

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
部分空間 $W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ のとき,

- $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ と書く. (初めて出てきた記号)
- W を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で生成された (generated) 部分空間という.
- W を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で張られた (spanned) 部分空間ともいう.
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W を生成する (generate), 張る (span) という
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は W の生成系 (generating set, spanning set) であるという.

事実

$V = \mathbb{R}^m$ の部分空間は必ず生成系を持つ (有限生成である)

有限という用語の起源: 上の定義より生成系は有限個のベクトルからなる

生成された部分空間の例

原点を通る直線 線形代数☆演習 I(2023)L04 は, $V = \mathbb{R}^m$ の部分空間.
$\{\boldsymbol{a}t | t \in \mathbb{R}\}$
原点を通る平面 線形代数☆演習 I(2023)L05 は, $V = \mathbb{R}^m$ の部分空間.
$\{\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s | s, t \in \mathbb{R}\}$
原点を通る $\Leftrightarrow$ パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ で $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

L29-Q2

Quiz(部分空間の生成系)

$V = \mathbb{R}^3$ の部分集合 $W = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} | x_2 = 0\}$ を考える.

1. W が V の部分空間であることを示そう.
2. W の生成系をみつけよう.

解空間の生成系の見つけ方

解空間の生成系

$V = \mathbb{R}^m$: ベクトル空間 のとき,
与えられた n 元同次連立 1 次方程式の解空間 $W \subset V$ の生成系 (の 1 つ) を得るには,
同次連立 1 次方程式として解いて加藤 線形代数 例題 1(p.62), 任意定数にかかるベクトルを集めてくればいい.
自明な解しかないとき, $W = \{\mathbf{0}\}$ なので生成系は空集合.

L29-Q3

Quiz(同次連立 1 次方程式の解空間の生成系)

空間のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^3$ を未知数とする同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える．ただし, $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

1. 解空間 W を求めよう．
2. 解空間 W の生成系をひとつ答えよう．
3. 解空間 W を描こう．

mobius K5.2.30 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

ここまで来たよ

28 5.1 ベクトル空間と部分空間 | 第 5 章 ベクトル空間

29 5.2 1 次独立と 1 次従属 | 第 5 章 ベクトル空間
- 5.2 1 次独立と 1 次従属
- Wolfram Alpha での行列計算

Wolfram Alpha での行列の計算 I

https://www.wolframalpha.com 無料部分あり

https://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html

Maple や C と文法が違う

行列

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}
{5,6}
```

Wolfram Alpha では変数代入できない (電卓的) ので毎回入力してください.

行列と行列, 行列とベクトルの積はピリオド

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}} . {{5,6},{7,8}}
{{1,2},{3,4}} . {5,6}
```

Wolfram Alpha での行列の計算 II

行列のべき乗, 逆行列, 行列式

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^5$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}^5
Inverse[{{1,2},{3,4}}]
Rank[{{1,2},{3,4}}]
Det[{{1,2},{3,4}}]
```

行簡約階段形 ReducedRowEchelonForm

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
RREF[{{1,2},{2,4}}]
```

連絡

- trialL29 は (Mobius K5 で練習の後に)Mobius で．5 章の Mobius はこれだけ．L29 授業後，期限 2023-08-02 水 20:00
- trialL30 は L01-L29 に対する (全学とは別の) アンケートと作文 (Moodle)．L29 授業後，期限 2023-08-02 水 20:00
- L30 は，あるとしても任意視聴動画で，trialL30 と関係しない
- 2023-08-02 水 1 任意参加小テスト 線形代数☆演習 I(2023)L28
- 2023-08-02 水 20:00 までの すべての Mobius 課題の取組状況を科目の成績に算入します
- 全学授業アンケート
- 教科書は (少なくとも) 卒業まで売らないで
- 2024 年度前期 確率統計 I でまたお会いしましょう (たぶん)