微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-12-06 Wed 更新: Time-stamp: "2006-12-14 Thu 07:56 JST hig"

10 定積分と原始関数

この時間は, 不定積分の積分定数 C を省略してもいいです.

10.1 お奨め問題

略解

1. $\int_{-1}^{0}(-x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=\cdots=\frac{5}{2}$.
2. $\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ で $t=\sin x$ とおいて, $\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|\sin x|+C$. 定積分は $\frac{1}{2}\ln 2$
3. $x\frac{1}{2}\sin 2x-\int(x)'\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.
4. $\lim_{R\to\infty}\int_R^{-2}\mathrm{e}^{+2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}$.

10.2 置換積分

略解

1. $-\frac{2}{\pi}$.
2. $\frac{26}{81}$.
3. $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}+C$. あるいは, $-\mathrm{Cos}^{-1}\frac{x}{a}+C'$. 積分定数 C, C' の間には, $C'=C+\frac{\pi}{2}$ という関係がある.
4. $\frac{1}{2}\ln|x^2+a^2|+C$.

10.3 場合わけのある積分

略解

1. $\int_0^2 -(x^2-x-2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-x-2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}-\frac{3}{2}=\frac{31}{6}$.
2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos x)\,\mathrm{d}x=2+2=4$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), tel: 0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{-1})(\mathrm{e}^{-2})^n = (\text{等比級数の公式}) = \tfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-2}} = \tfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} \quad (10.1)$$

4. $\int_{-\infty}^{a} \frac{-1}{\cosh x}\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x = -2\int_0^{\mathrm{e}^a} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_{\mathrm{e}^a}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \cdots = \pi - 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^a$ または $2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^{-a} - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^{a}$.

10.4　部分積分

略解

1. $\frac{9}{40}$.
2. $(-x^2-2x-2)\mathrm{e}^{-x}+C$.

10.5　広義積分

略解

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\mathrm{Tan}^{-1}\,x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.
2. $I(R) = \int_{-R}^{0} x\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x$ とおくと, 部分積分により,

$$\begin{aligned} I(R) =& [x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0} - \int_{-R}^{0}\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\ =& [x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0} - [(\tfrac{1}{1-i})^2\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0} \\ =& (0+\tfrac{1}{1-i}R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R}) - (\tfrac{1}{1-i})^2(1-\mathrm{e}^{-(1-i)R}). \end{aligned} \quad (10.2)$$

ここで, $R\to+\infty$ のとき $|\mathrm{e}^{-(1-i)R}| = |\mathrm{e}^{-R}| \to 0$, $|R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R}| = |R\,\mathrm{e}^{-R}| \to 0$ なので,

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = -(\tfrac{1}{1-i})^2 = -\tfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2} = -\tfrac{1}{2}i. \quad (10.3)$$

3. 置換積分 $t := x^2$ により, $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$.