確率 $P(x, t)$ の漸化式

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L04(2015-05-01 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-05-01 Fri 14:38 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの規則から $P(x, t)$ の初期値と漸化式を導ける.
- 初期値と漸化式から $P(x, t)$ を計算できる.
- 標本平均値と標本分散から, t 分布を利用して, 母平均値の信頼区間を求められる.

http://hig3.net

L03-S2
Quiz 解答:ランダムウォークの確率と座標の期待値

1. $P(0,100) = \frac{100!}{50!50!}(\frac{1}{3})^{50}(\frac{2}{3})^{50}$.
2. 到達できる x は $|x| \leq t$ なので,
   $P(98,100) + P(99,100) + P(100,100) =$
   $\frac{100!}{99!1!}(\frac{1}{3})^{99}(\frac{2}{3})^{1} + 0 + \frac{100!}{100!0!}(\frac{1}{3})^{100}(\frac{2}{3})^{0}$.
3. $\mathrm{E}[R(1)] = (+1) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.
4. $\mathrm{V}[R(1)] = \mathrm{E}[R(1)^2] - \mathrm{E}[R(1)]^2 = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$.
5. $\mathrm{E}[X(100)] = 100 \cdot \mathrm{E}[R(1)] = -\frac{100}{3}$.
6. $\mathrm{V}[X(100)] = 100 \cdot \mathrm{V}[R(1)] = \frac{800}{9}$.
7. $\sqrt{\mathrm{V}[X(100)]} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$.

ここまで来たよ

確率や期待値を求めたい

ランダムウォーカーの時刻 t の座標 $X(t)$ は漸化式

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(0) = 0.$$

に従う. $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布に従う確率変数.

いくつかの作戦

- (方法 1-1) 手計算で $P(X(t) = x)$ を求める.
- (方法 1-3) 2 項定理から $P(X(t) = x)$ をいっきに式で書いちゃう 計算科学 II
- (方法 1-3') ランダムウォークの性質を使って, $\mathrm{E}[X(t)], \mathrm{V}[X(t)]$ を簡単に求めちゃう. 計算科学 II, 確率統計 II
- (方法 1-2) ランダムウォークの性質と中心極限定理で, $P(X(t) = x)$ を $T \to \infty$ の極限で近似的に求める. 計算科学 II, 確率統計 II
- (方法 1-4) $P(x,t)$ の漸化式+母関数でなんでも求めちゃう 計算科学 I
- (方法 2) 計算機と乱数で標本抽出と推定でやっちゃえ → 確率過程の確率シミュレーション 計算科学 II

$P(x,t)$ の漸化式

時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $P(x,t) = P(X(t) = x)$.
$X(t)$ の漸化式から $P(x,t)$ の漸化式を導きたい.
次の具体的な R で考えよう.

R	確率
-1	$q = 1 - p$
$+1$	p

確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N = 1000$ 人いるかのように考えよう.
時刻 t に x にいる $N \times P(x,t)$ 人のうち, 時刻 $t+1$ には, 平均的には

- $N \times P(x,t) \times p$ 人が $x+1$ に
- $N \times P(x,t) \times q$ 人が $x-1$ に

去るはず.

逆に考えると, 時刻 $t+1$ に,

- $x-1$ から $\boxed{}$ 人が x に
- $x+1$ から $\boxed{}$ 人が x に

やってくるはず.

$$\boxed{}$$

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

$t\backslash x$	$\cdots$	-1	0	1	$\cdots$	x	$\cdots$
$\vdots$					$\cdots$		$\cdots$
t					$P(x-1,t)$	$P(x,t)$	$P(x+1,t)$
$t+1$					$P(x-1,t+1)$	$P(x,t+1)$	$P(x+1,t+1)$
$\vdots$							

$P(x,t)$ の漸化式を適用してみよう

$t\backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0			0	0	1	0	0		$\cdots$		$\cdots$
1									$\cdots$		$\cdots$
2									$\cdots$		$\cdots$
3									$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$											
t										$P(x,t)$	
$\vdots$											

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークの座標の母分布
2. 確率 $P(x,t)$ の漸化式
   - $P(x,t)$ の漸化式
   - $P(x,t)$ の初期条件
   - 復習:母平均値の区間推定と信頼区間

$P(x,t)$ の初期条件

例 1

$t = 0$ には $x = 0$ にいる →

$X(0)$	確率
$\vdots$	0
-1	0
0	1
$+1$	0
$\vdots$	0

→ $P(x,0) =$

例 2

$t = 0$ には $x = 0, 10$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(0)$	確率
$\vdots$	0
0	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	0
10	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	0

→ $P(x,0) =$

L04-Q1

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

する.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

L04-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=3$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{8}$ で x から $x+1$ に移動
確率 $\frac{3}{8}$ で x から $x-2$ に移動
確率 $\frac{4}{8}$ で x にとどまる

ものとする.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ の (t に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

L04-Q3

Quiz(2 項係数の漸化式)

次のランダムウォークの確率の漸化式を考える.

$$P(x,t+1) = \begin{cases} \frac{1}{5}P(x-1,t) + \frac{4}{5}P(x+1,t) & \text{(それ以外)} \\ 0 & (x < -1, x > 6) \end{cases},$$

$$P(x,0) = \begin{cases} 0.5 & (x = 1, 3) \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

下のような $P(x,t)$ の表を, 漸化式を適用して埋めよう.

$t \backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
0										
1										
2										

L04-Q4

Quiz(2 項係数の漸化式)

2 項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ を考える.
2 項係数は漸化式

$$ {}_{t+1}\mathrm{C}_x = {}_t\mathrm{C}_{x-1} + {}_t\mathrm{C}_x $$

を満たす ($t = 0, 1, 2, \cdots$, x は整数).
$t = 0$ に対して,

$$ {}_t\mathrm{C}_x = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} $$

である.

1. 上の漸化式と初期条件だけを使って, 縦に $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 横に $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の表に 2 項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ をうめよう.
2. ${}_t\mathrm{C}_x$ の場合の数としての意味から, 漸化式が成立することを直観的に説明しよう.

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークの座標の母分布
2. 確率 $P(x,t)$ の漸化式
   - $P(x,t)$ の漸化式
   - $P(x,t)$ の初期条件
   - 復習:母平均値の区間推定と信頼区間

母平均値の区間推定 (母分散未知)

確率統計☆演習 L10

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の母集団から, サイズ n の標本を抽出する.

区間推定

サイズ n の標本の標本平均値が m, 標本分散が S^2 だったとき,
母平均値 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

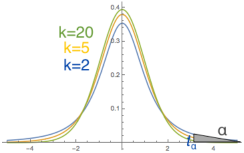
$$m - t_\alpha(n-1) \times \sqrt{S^2/n} < \mu < m + t_\alpha(n-1) \times \sqrt{S^2/n}$$

$\boxed{}$ とき, μ がこの不等式を満たす (=信頼区間に含まれる) 確率は $1-\alpha$.
よく使われる値: $\alpha = 0.01, 0.05 \to$ 信頼係数 $99\%, 95\%$.

t-分布表

$\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる, $t_\alpha(k)$ の値の表.
$k > 100$ は大標本 $k = +\infty$ と同じだと思っちゃえ! $\Leftrightarrow$ t 分布と正規分布同じだと思っちゃえ!

$k \backslash \alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291



L04-Q5

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知))

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig は, 独立同分布にしたがう確率変数である. 製造された 5 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.

$52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 53\mathrm{g}, 48\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

1. X_i の母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$, 母分散 $\mathrm{V}[X_i]$ を点推定しよう.
2. X_i の母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$, を信頼係数 99%で区間推定しよう (整理や小数表示不要. $\sqrt{\ }$ が残ってもよい).

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`

演習の春のプチテスト

2015-05-20 水 3. 案内参照.

Math ラウンジ=チューター

月火水木昼.
Visual Studio の使い方や自宅インストールにも対応できます.

予習問題

(連休特別ルール)
講義演習あわせて, e ラーニング RaMMoodle
`https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/` での予習問題の次回の締切は, 2015-05-08 金 11:05