数理モデル基礎☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] **配布**: 2009-07-29 Wed **更新**: Time-stamp: "2009-08-11 Tue 14:50 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. **答案作成 90 分.**
2. **解答用紙の指定された面に解答しよう**.
3. **数学的に正しい過程を記そう**.
4. **問題文に現れない記号を使うときは**, **定義を記そう**.

$y(x)$ **についての次の微分方程式の一般解** (**と**, **存在する場合には特異解**) **を求めよう**. **ここで** $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. **ただし**, $A, B, C, C', C'', \dots, C_0, C_1, C_2, \dots$ **は断りなしに定数を表す文字として使ってよい**.

(1) $$y' = -2y$$

(2) $$y' + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = 0$$

(3) $$y' = -2(y^2 + 3y + 2)$$

(4) $$y' + 2x + 2y + 2 = 0$$

(5) $$y' = y^2 \mathrm{e}^{-3x}$$

(6) $$y' + \frac{2}{x} \cdot y = -2$$

(7) $$y' = \frac{3x^2 + 2y}{-2x + 2y}$$

(8) $$y'' + 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{-5x}$$

(9) $$y'' + 5y' + 6y = -7\mathrm{e}^{-2x}$$

(10) $$y'' + 9y = 5\cos(3x) + \mathrm{e}^{-3x}$$

アンケート

1. **まったくわからない問題が何問ありましたか**.
2. **時間がなくて手をつけられない問題が何問ありましたか**.
3. **まったくわからない問題を除いて**, **ひと通り解き終わるのに何分かかりましたか**. **解き終わらなかった人は**, **何分あればひと通り解き終わりそうですか**.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

数理モデル基礎☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2009-07-29 Wed 更新: Time-stamp: "2009-08-11 Tue 14:50 JST hig"

括弧の中に記しているのは代表的な解き方です.

(1) $y = Ce^{-2x}$ (完全微分形/変数分離形微分/1 階線形斉次微分方程式)

(2) $y = \dfrac{2x}{Cx^2 - 1}, \quad y = 0$ (同次形微分方程式)

(3) $y = -\dfrac{1 - 2Ce^{-2x}}{1 - Ce^{-2x}}, \quad y = -2$ (変数分離形微分方程式)

(4) $y = Ce^{-2x} - x - \frac{1}{2}$ (1 階線形非斉次微分方程式)

(5) $y = (\frac{1}{3}e^{-3x} + C)^{-1}, \quad y = 0$ (変数分離形微分/完全微分形方程式)

(6) $y = Cx^{-2} - \frac{2}{3}x$ (同次形/1 階線形非斉次微分方程式)

(7) $x^3 + 2xy - y^2 = C$ (完全微分形方程式)

(8) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{2}{9}e^{-5x}$ (定数係数 2 階線形微分方程式重解タイプ)

(9) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} - 7xe^{-2x}$ (定数係数 2 階線形非斉次微分方程式共振タイプ)

(10) $y = C_1\cos(3x) + (C_2 + \frac{5}{6}x)\sin(3x) + \frac{1}{18}e^{-3x}$ (定数係数 2 階線形非斉次微分方程式共振タイプ)

講評

1. 絶対値をはずすときに $\pm$ が発生するはず.

2. 特異解の意味を心からわかろうね. $y = 0$ のとき, 特異解は $y = C$ っておかしいでしょ. 一般の $y = C$ が解なわけじゃないでしょ(そうだったらそれは一般解)

変数分離がでてきたら特異解がないか注意しよう. 逆に線形の場合は, $Cf(x) + g(x)$ みたいなのが一般解だって保証されてるわけだから, 気をつけてても特異解は出てこない.

3. 1 次方程式解くぐらいで $y =$ の形にできるときはそうしようよ.

分子の $2C$ を C' などと置き換えてはいけない. だって, C と C' を勝手な値にしたら解にならないでしょ. C と $2C$ であるかぎりは, C が勝手な値でも解だよね.

4. 斉次っていったら y に比例する項しかないような方程式なわけで, $y' + 2y + 2 = 0$ は斉次ではありません.

5. $3e^{3x} + C$ になっているひとが多かったのは残念. $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ ですか?

6. $\log$ は微分方程式ではよく出てきます. 計算で間違えた人は復習しよう.

7. 完全微分形の $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial P}{\partial x}$ の混同に注意.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

$f(x,y)=x^3+2xy-y^2+C$ では一般解とは言えない．これは $f(x,y)$ の定義にすぎない．上のほうで，一般解は $f(x,y)=D$ という形，と主張してあればいいけど，そうでないなら，$x^3+2xy-y^2+C=0$ と書かないと一般解を求めたことにはならない．

8.9.10. 後半に，(特別な場合である) 非斉次項が斉次方程式の解になってる場合をやりすぎたせいか，ふつうの代入法に迷いが出てる人がいることを憂慮してます．代入法は，斉次の解じゃなく，非斉次項 (とその微分) に似せて形を仮定するんだよ．

授業で言ったように，間違えて仮定して矛盾が出たらやり直せばよいんだけど，この問題ぐらいなら最初から正しく仮定できてほしいな〜

それから，いつでも $y=(ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}$ とおけばいい，みたいなおぼえ方で満足しないようにしよう．もっと効率よいやり方をしよう．

配点と採点の方針

各 10 点．計 100 点．以下は採点の指針であり，機械的に適用しているわけではありません．

1. 変数分離の形$+2$．積分$+3$．正答 10．
2. 同次形で u,x の微分方程式の形$+4$, 部分分数分解$+1$, 積分$+2$, 整理$+2$, 特異解$+1$ 点
3. 変数分離:$+2$ 点，部分分数分解:$+2$ 点，積分:$+3$ 点，整理:$+2$ 点，特異解$+1$ 点
4. 斉次の一般解:$+5$ 点，非斉次の特解:$+5$ 点
5. 変数分離:$+3$ 点，積分各辺:$+2\times 2$ 点，整理:$+2$ 点，特異解:$+1$ 点
6. 斉次の一般解:$+4$ 点，非斉次の特解:$+4$ 点，最終的な形:$+2$ 点．
7. 完全微分形チェック:$+3$ 点，$=C$ の欠落:8 点，正答:10 点
8. 斉次方程式の解:$+4$ 点,$A\mathrm{e}^{-5x}$ で代入法:$+2$ 点，$A=\frac{2}{9}$:$+2$ 点，最終的な形:$+2$ 点．
9. $C_1\mathrm{e}^{-2x}$: $+2$ 点，$C_2\mathrm{e}^{-3x}$: $+2$ 点，$Ax\mathrm{e}^{-2x}$ で代入法:$+3$ 点，$A=\frac{1}{2}$:$+3$ 点．
10. 斉次方程式の解:$+2$ 点,$A\mathrm{e}^{-3x}$ で代入法:$+2$ 点，$A=\frac{1}{18}$:$+2$ 点，$Bx\cos(3x)+Cx\sin(3x)$ で代入法:$+2$ 点，$B=0,C=\frac{5}{6}$:$+2$ 点．

http://hig3.net