| 全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解 |

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:41 hig"

物理数学☆演習 I

- **講義の** Web page
  `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/` **また**,
  `http://hig3.net/` **からもたどれます** (**下の** QR **コード**). **このページから匿名で質問, リクエストできます** (**携帯にも対応**).

- **このような文書を毎回配ります. 講義後は** (**たまに講義前にも**) **上の** Web page **や** 1-502 **前の引き出しに置いてあります. 欠席した場合**

など, 必要な人は各自持っていってください.

- 成績は授業中に行う プチトライアル+quiz 15 点, 春 (5 月) のプチテスト 15 点, 夏 (6 月) のプチテスト 25 点, 期末試験 (7 月) 50 点の合計で評価します. 100 点以上は 100 点とみなします. プチテストの正確な日程は追って連絡します.

- quiz は授業の最後に (教科書参照, 相談ありで) 行う 20 分程度の演習, プチトライアルは授業の最初に (教科書参照, 相談なしで) 行う 10 分程度の演習です. 両方または片方を行います.

- 香中 p.99, 微積分 p.123 はそれぞれ, 物理数学☆演習 I のテキスト 香取-中野 物理数学の基礎, 微積分および演習のテキスト 川野ほか 微分積分＋微分方程式の参照個所を示します.

- 再履修の方へ: 2004 年度以前の内容と同じではありません.

1. 3 次元のベクトルとその演算

1.1 ベクトルとスカラー

香中 p.2

始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という. $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ などとかく.

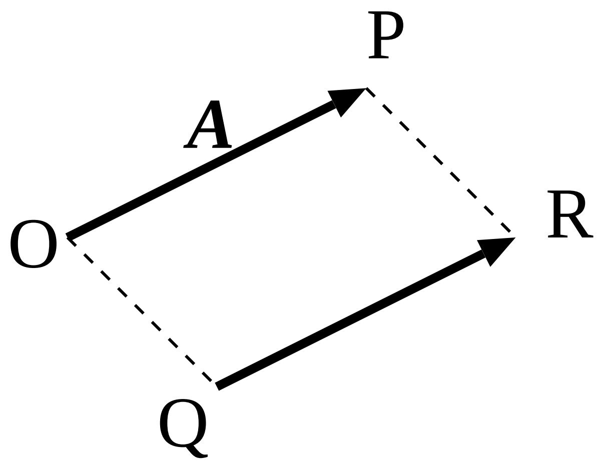
この矢印のように, 大きさと方向の両方のある量を ベクトル という.

大きさだけのある量を, ベクトルに対して スカラー という.

大きさと向きが両方等しければ, (始点が違っても) ベクトルは等しい. つまり, 1

して重なるようなベクトルは等しい.

$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{QR}}$.



ベクトルの例: 風 (風向きと風力). スカラーの例: 温度.

記号の使い方

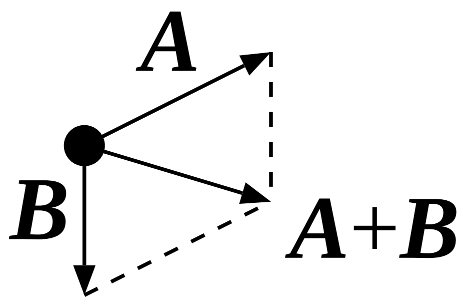
- ベクトルは $\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{A}$ のような傾いた太い字 (または $\vec{r}$ のように) で表わす.
- スカラーは r のような傾いた細い字で表わす.
- 点の名前や単位は O,P,Q,R, m, kg のように立った細い字で表す.

1.2 ベクトルの演算

香中 p.3

ベクトルの和

一般に, ベクトル $C = A + B$ とは, A と B を 2 辺とする平行四辺形の対角線のベクトル.

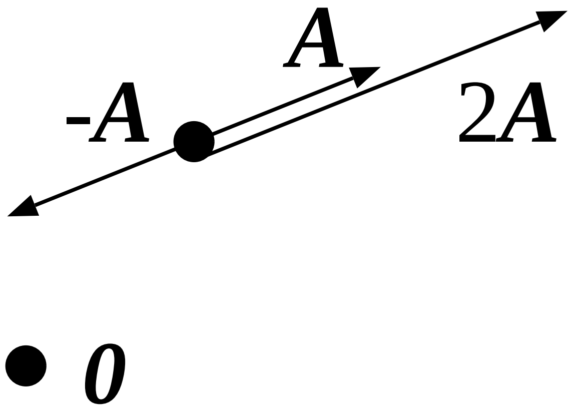


ベクトルとスカラーの積

ベクトル A と スカラー c の積 $B = c \times A$ は, ベクトルであり,

- 大きさは A の $|c|$ 倍.
- 向きは, 2

3 $c = 0$ なら, あとで出てくるゼロベクトルになる.



ベクトルのスカラー倍ともいう.

ベクトルの差

ベクトル A とベクトル B の差 $C = A - B$ とは, ベクトルであり,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + ((-1) \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

ゼロベクトル

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}$ や, $0 \times \boldsymbol{A}$ は, ゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ である.

ゼロベクトルは, 大きさは 0 で, 向きはない.

$$0 \times \boldsymbol{A} = 0 \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

ベクトル, スカラーについては, 普通の数であるかのように展開して計算してよい.

例: $2(3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = -2\boldsymbol{B} + 6\boldsymbol{A}$.

1.3 ベクトルの座標表示

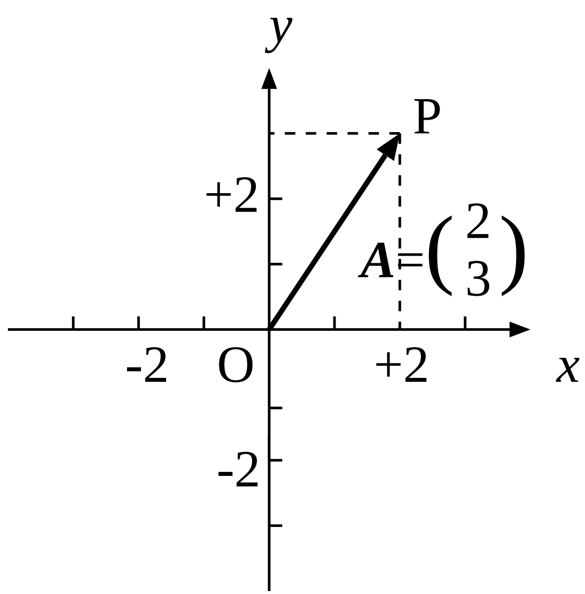
香中 p.9

ベクトルを, やっぱり, 絵じゃなく数字で表わしたい!

図のように, 原点 O で垂直に交わる x-軸, y-軸を平面に描く. x-軸, y-軸には向きがあり, x-座標, y-座標がある. x-軸, y-軸に垂線を下ろして x-座標, y-座標をよみとる.

この

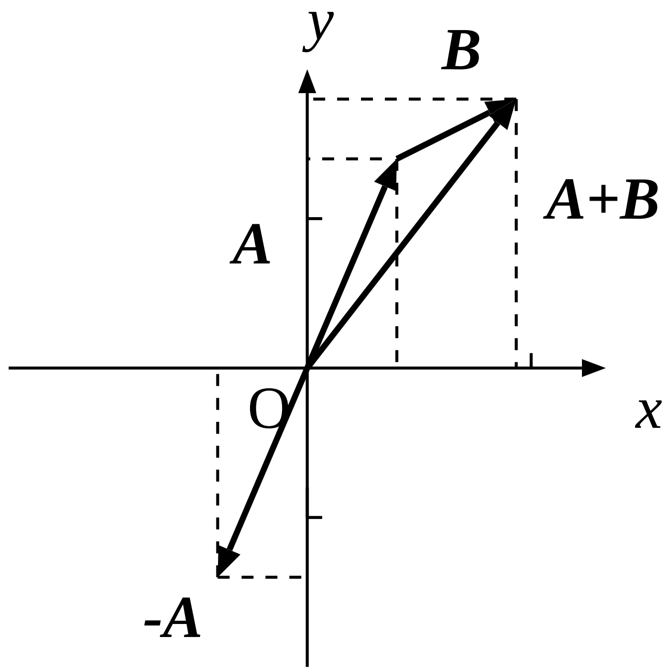
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \begin{matrix} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \end{matrix} \tag{3}$$



を ベクトルの座標表示 または 4 という. 2 を x 成分, 3 を y 成分という.

横に $\boldsymbol{A} = (2, 3)$ のように書くこともある.

成分で書いた ベクトルの和とスカラー倍



ベクトル

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{4}$$

とスカラー c **に対して**,

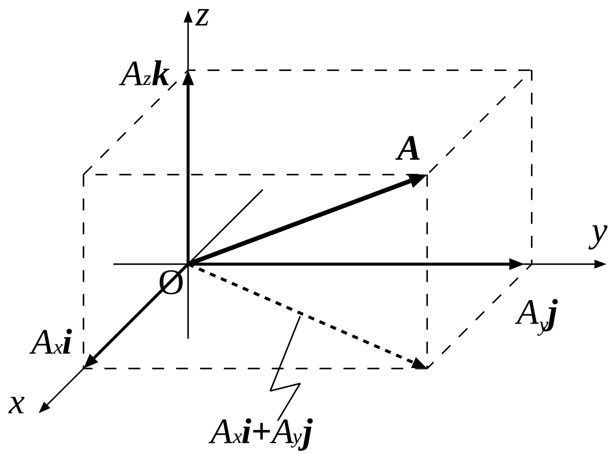
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{6} \end{pmatrix}, \quad c\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} c \times A_x \\ c \times A_y \end{pmatrix} \tag{5}$$

である.

1.4 3 次元の座標系

香中 p.13

互いに直交する x,y,z の 3 つの座標軸を使う.
3 次元のベクトル $\boldsymbol{A}$ の始点を原点に置いたとき, 終点の座標を $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分といい, A_x, A_y, A_z と書く.



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \begin{array}{l} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \\ z\text{-成分} \end{array} \tag{6}$$

ふつうは, 右手を開いたときの親指方向を x, 人指し指方向を y, 中指方向を z 軸の正の方向にとる.

左手を使うと, z 軸の向きが逆になる.

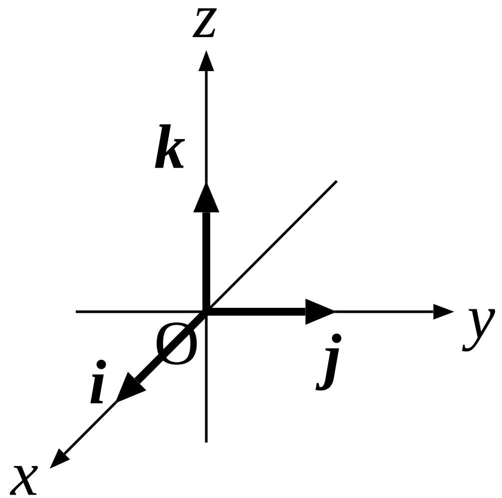
1.5 基本ベクトル

香中 p.14

単位ベクトル: 大きさが 1 のベクトル.

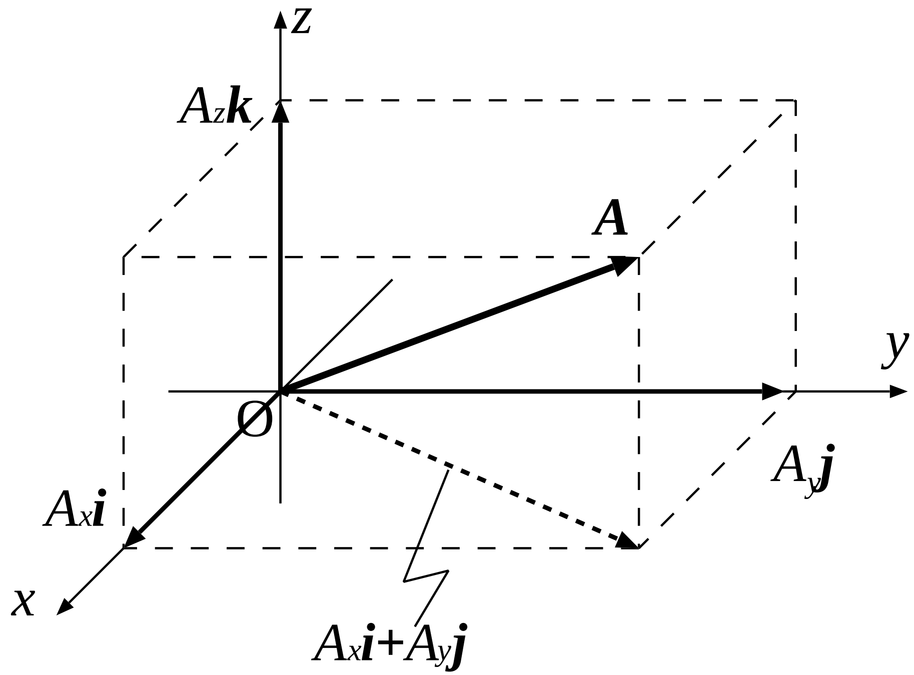
x,y,z 軸の正の向きの単位ベクトルを 7 といい,

$$\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (7)$$



と書く. これらを用いると,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}. \quad (8)$$

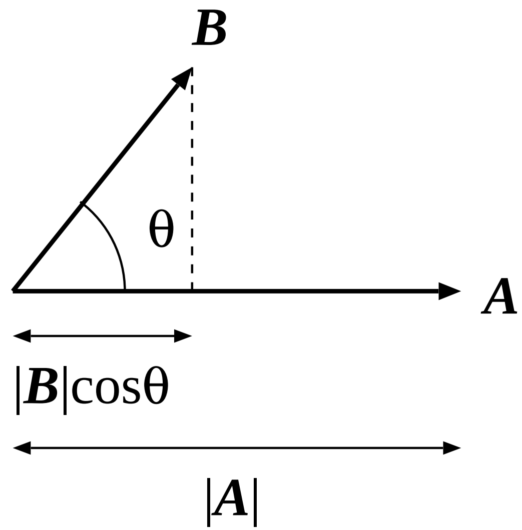


x, y, z 軸を右親人中指にとるとき, ベクトルの 3 個組 $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ は 8 だという. $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{k}\rangle$ は右手系じゃない.

1.6 内積 (スカラー積)

香中 p.4

ベクトル A の大きさ (長さ, 絶対値) を $|A|$ と書く (絶対値と同じ記号). $|A|$ はスカラー (実数).



2 つの 3 次元ベクトル A, B に対して, 次の式で計算されるスカラー $A \cdot B$ のことを **内積** という.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}| \times |\boldsymbol{B}| \times \cos\theta.} \tag{9}$$

ベクトル A, B, C, スカラー c に対して, 普通の数であるかのように,

$$(2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

のように展開したりしてよい.

基本ベクトル i, j, k は互いに直交していて大きさ 1 なので,

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0. \tag{11}$$

内積 $A\cdot B$ の成分表示

香中 p.16

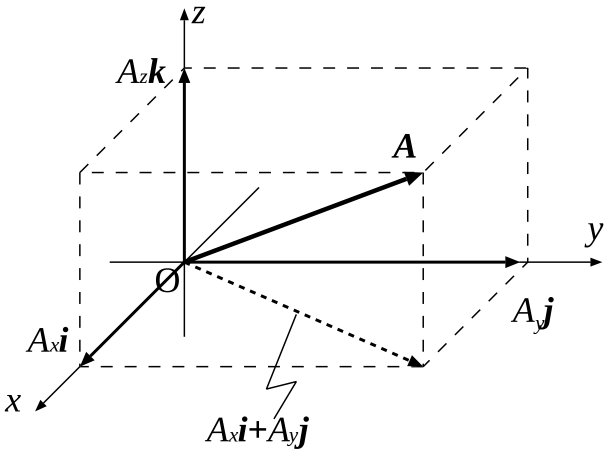
$$\begin{aligned}\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}} &=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\ &=(A_xB_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+A_xB_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+A_xB_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\ &+(A_yB_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+A_yB_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+A_yB_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\ &+(A_zB_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+A_zB_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+A_zB_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\\ &=\boxed{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}\end{aligned} \tag{12}$$

仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.

ベクトルの大きさ (内積の使い道 1)

三平方の定理を 2 回使うと, ベクトル A の絶対値 $|A|$ は

$$|\boldsymbol{A}|^2 = \left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 + A_z^2 = \boxed{9} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (13)$$



内積の使い道 2: ベクトル A と B のなす角度

内積の定義の式 (9) **を逆に使うと**,

$$\cos\theta = \boxed{} \tag{14}$$

10

で, **ベクトル** A **と** B **のなす角度** θ **が計算できる**.

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **とする**. $A \cdot B, |A|$, **および** A,B **のなす角** θ **は**?

11

1.7 外積 (ベクトル積)

香中 p.6

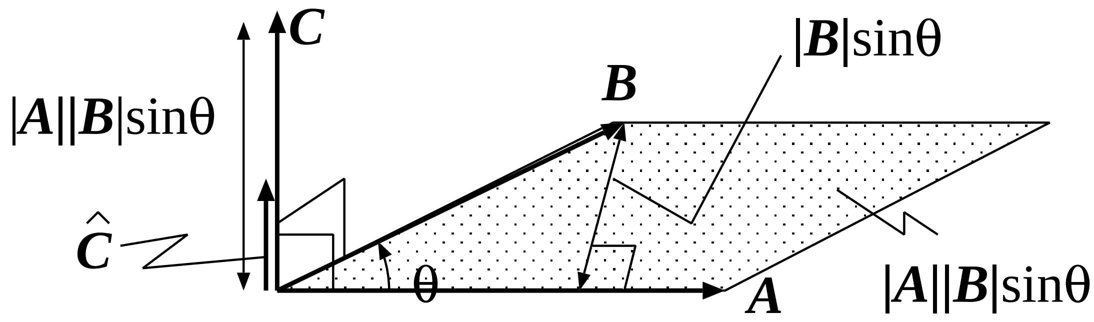
2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ のことを 外積 という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,(\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{C}}} \qquad (15)$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \hat{\boldsymbol{C}} \rangle$ が右手系をなすようなもの.

別の言い方:

$\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{B}$ で, $\boldsymbol{C}$ の向きは, $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に回る右ねじが進む向き.



大きさは $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta = \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のはる平行四辺形の面積.

計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい．ただし,

$$\textbf{超注意} \quad \boxed{\color{cyan}{12}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{16}$$

$$\textbf{超注意}.\ \sin\theta = 0 \ \textbf{だから} \ \boxed{\color{cyan}{13}\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{17}$$

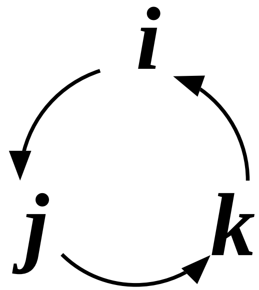
$$\textbf{計算例}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = \mathbf{0}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{18}$$

基本ベクトルの間の外積

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0}. \tag{19}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=+\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=+\boldsymbol{j}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}. \tag{21}$$

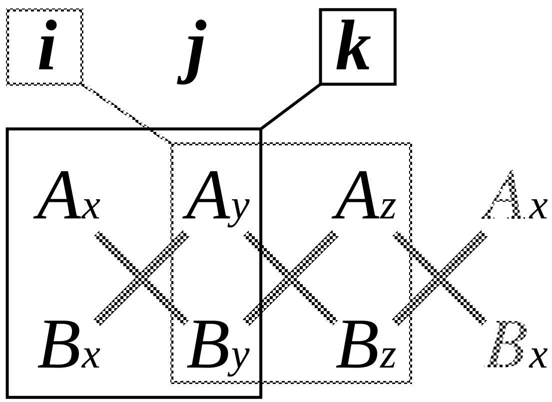


$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ **が** 循環的 (cyclic) **に入れ替わってることに注意**. $\boldsymbol{i}\to\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{i}$.

外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の成分表示 香中 p.16

$$
\begin{aligned}
&\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}} \\
=&(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}) \times (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\
=&(A_xB_x\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + A_xB_y\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + A_xB_z\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) \\
&+ (A_yB_x\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + A_yB_y\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + A_yB_z\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) \\
&+ (A_zB_x\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + A_zB_y\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + A_zB_z\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) \\
=&\boxed{(A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}.}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

x, y, z **が循環的に入れ替わってることに注意**. $x \to y \to z \to x$.

覚え方　$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} =$ 

$$
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}
$$

例題 2

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ +5 \end{pmatrix}$ に対して, 外積 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ を計算しよう.

14

フレミングの左手の法則やローレンツ力は, 外積で簡単に書ける:

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.

quiz 1

ベクトル $A = \begin{pmatrix} -3 \\ +5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} +4 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ とスカラー $c = -2$ とする．ベクトル A, B の図を描こう．また，

$$A - 2B, c \times A, |A|, A \cdot B, A \times B$$

(の成分表示) を求めよう．

quiz について

- ほぼ毎回，理解を確かめる quiz をします．配った紙に解いてください．感想や質問も書いてください．提出は，フォルダーを学籍番号でグループ分けしています．
- 略解はその日のうちに Web に置きます．
- 紙は，チェックした後，1-502 前の引き出しで返却します．ただし，数週間以上経過したものは処分することがあります．

- **来週は講義の最初に内積外積のプチトライアルやります**．**上の** quiz **がわかってれば大丈夫です**．

- **内積外積の答え合わせ用** i/V/EZ **アプリ**

  `http://hig3.net/` > i/V/EZ **アプリ** > **ベクトルの内積外積**

全体	目次	前回	次回	略解

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:41 hig"

科目のページ+質問/コメント/苦情用掲示板

http://hig3.net/

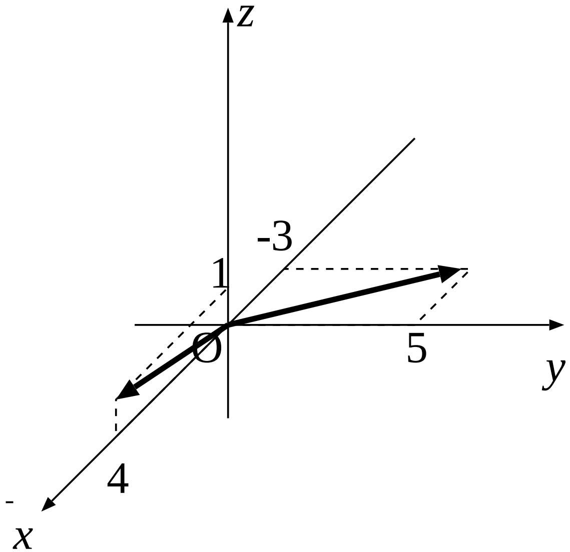
今日の目標

- 内積の直観的な意味 → 射影

quiz 略解 1

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-11\\+5\\-2\end{pmatrix},\quad c\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6\\-10\\0\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{34},\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-12,\quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5\\3\\-20\end{pmatrix}$$



ベクトルには必ず太字を使おう.

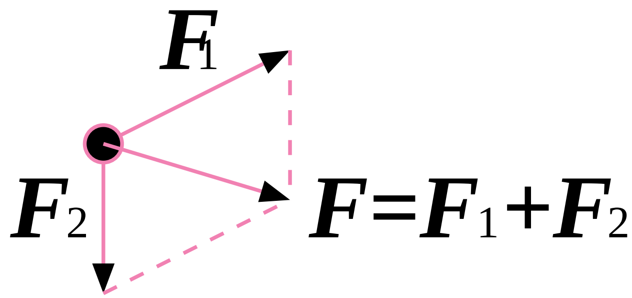
$5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$ **より, 上の答え方のほうが趣味がよい. 問題文には i,j,k は出てこないから.**

2. 内積と力のバランス

2.1 力はベクトル

香中 p.3

力は向きと大きさを持ち，ベクトルで表される．大きさの単位はニュートン N=kg · m/s^2.

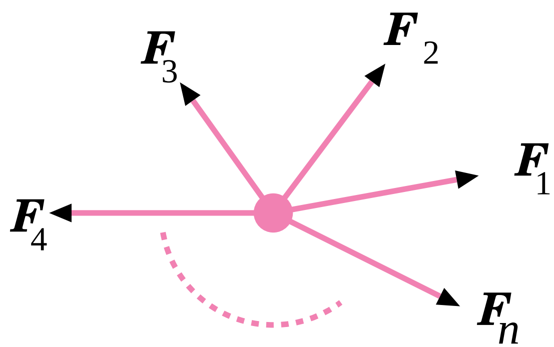


物体に，2 つの力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が

同時にはたらいているのは，1 つの力 (15) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ がはたらいているのと同じこと．

物体にはたらくすべての力の合力が

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots\boldsymbol{F}_n=\boldsymbol{0}} \tag{23}$$



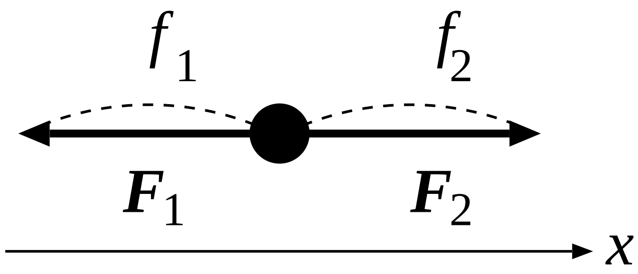
のとき，力は つりあっている，つりあいの状態にある という．このとき，止まっていた物体は止まったまま．

2.2 ベクトルの和と綱引き

図の場合, $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\mathbf{0}$ **のときつりあっている**.

力の大きさ $f_1, f_2(>0)$ **で書くと**,

$$f_1 = f_2 \quad \textbf{つまり} \quad f_1 - f_2 = 0 \tag{24}$$



がつりあいの条件.

f_1 と F_1 の関係

$$f_1 = |\boldsymbol{F}_1|(>0), \quad f_2 = \boxed{16}(>0), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \boxed{17}, \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} +f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ **はベクトル**, **力の大きさ** f_1, f_2 **はスカラー**.

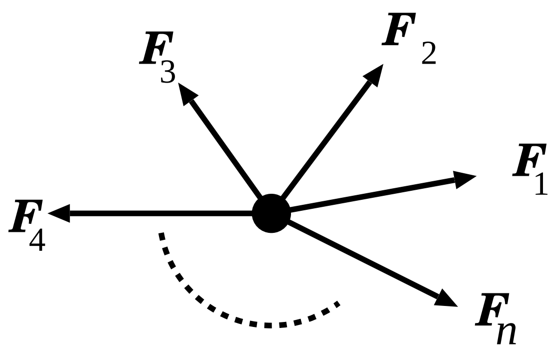
例題 3

マルチ綱引きの 4 チームが, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$ の力で引いたところ, つりあいの状態になって綱は動かなかった.

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

のとき, $\boldsymbol{F}_4$ を求めよう. いちばん力の大きいチームはどれ?

気をつけてね: 図で, ベクトルは, 綱の長さとは関係ない. 引く力の大きさ (強さ) を表している.

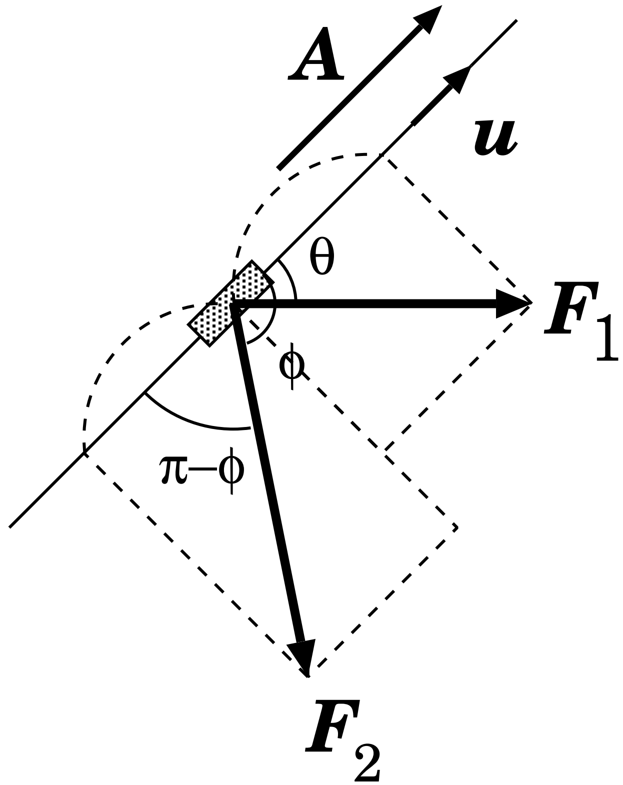


18

2.3 ベクトルの内積と列車の綱引き

線路上しか動けない列車に綱をつけて綱引き!

$\boldsymbol{F}_1$ を線路に平行なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\perp}$ に分解して考える.



$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{1\parallel} + \boldsymbol{F}_{1\perp} \tag{28}$$

列車の動きに関係あるのは線路に平行なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$ だけ. 列車が動かないためには,

$$\boldsymbol{F}_{1\parallel} + \boldsymbol{F}_{2\parallel} = \boldsymbol{0} \text{ つまり } \boldsymbol{F}_{1\parallel} = -\boldsymbol{F}_{2\parallel} \tag{29}$$

であればいい. 両辺の絶対値をとると,

$$|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta = |\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi-\phi). \tag{30}$$

この条件は内積を使うともっと簡単に書ける!

線路に平行な (単位ベクトルと限らない) ベクトルを A とする.

ベクトル F の, ベクトル A の向きの成分は, $\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{F}|\cos\theta}$

ただし, $u=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}A$ は A と同じ向きの単位ベクトル.

線路上しか動けない列車のつりあいの条件は

$$\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots\boldsymbol{F}_n)\cdot\boldsymbol{u}=0} \tag{31}$$

つまり, 合力 F の, (線路に平行な) ベクトル A の向きの成分が 0 になること. 成分 $F\cdot u$ は, 合力が A の向きにどれだけはたらくかを表す量.

上の力 2 個の場合に, この条件は, 19 **より,**

$$\begin{aligned}0=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{u}=&\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{u}|\cos\theta+|\boldsymbol{F}_2||\boldsymbol{u}|\cos\phi\\=&|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta-|\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi-\phi).\end{aligned} \tag{32}$$

たしかに同じ条件になっている!

例題 4

まっすぐな線路が, ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行に走っている.

1. 線路に平行な単位ベクトル u を求めよう.
2. 列車に力 $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が加わっている. 線路に平行な力 F_3 を加えて列車を動かないようにするには, F_3 はどのようなベクトルであればいいか考えよう.
3. 力の大きさ $|F_3|$ を求めよう.

20

2.4 力以外にも '何とか向きの成分' は使える

例題 5

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向き, 上が z 軸の正の向きであるような右手系をとる.

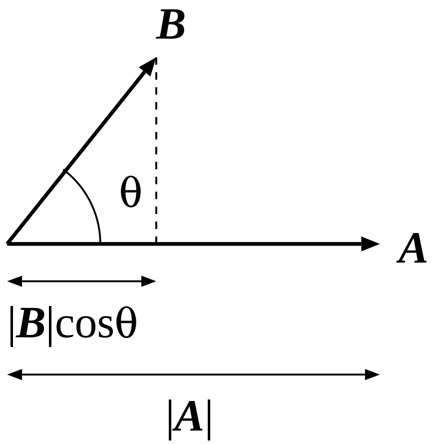
1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 $45°$ の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

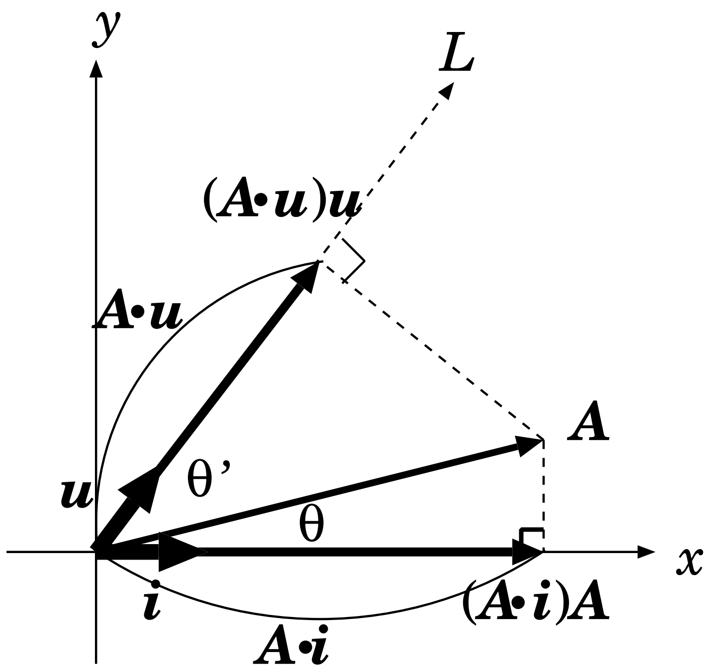
21

2.5 内積ってけっきょく何?

A と B の協力度みたいなもの

- 2 つのベクトルの向きが近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
- 2 つのベクトルの向きが反対だと負. $\cos \pi = -1$
- 2 つのベクトルの向きが直交してると零. $\cos \frac{\pi}{2} = -1$. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
- 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.
- $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ は, B の A 向き成分.





i, u は単位ベクトル.

$\boldsymbol{A} \cdot i$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 成分 (i 向きの成分)

$(\boldsymbol{A} \cdot i)\boldsymbol{A}$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 軸への射影.

$\boldsymbol{A} \cdot u$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の (有向) 直線 L 成分 (u 向きの成分)

$\boldsymbol{A} \cdot i$: ベクトル $\boldsymbol{A}$ の直線 L への射影.

- **内積外積の答え合わせ用** i/V/EZ **アプリ**

  http://hig3.net/ > i/V/EZ **アプリ** > **ベクトルの内積外積**

- **今日の** quiz **は回収しません．下の空欄，または自分のノートにやってね．来週のプチトライアルはここから出題します．解答は今日中に** Web **に置きます．**

quiz 2

ベクトル $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ **とする．ベクトル** A **に平行で同じ向きの単位ベクトル** u **の成分表示を求めよう．ベクトル** B **の，ベクトル** A **の向きの成分を求めよう．**

全体	目次	前回	次回	略解

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:40 hig"

春のプチテストやります!

2004/05/19(木) です．掲示参照．

採点済プチトライアルをチェックしよう!

1-502 前の引き出しで返却してます．プチトライアルは上の方に点数が記してあります．ふつう，3 点満点です．× か は，考え方が間違っているという意味です．× け は，考え方は正しいけれど計算で間違っているという意味です．

ただご飯イベントやります!

5/16(月)12:30–, 1-502 です．10 組です．10 組以外も歓迎．掲示見てね．

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

数検を団体受検しよう!

二宮先生の基礎セミナー受講してない人も受検できます．受付は 5/13(**金**) 1-501, 13:30–15:30 , **受検は** 6/18(**土**) 9:20–12:50 **です．** 1 **号館** 5 **階の掲示または** `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/suken/` **見てね．**

チューターに質問しよう!

大学院生の方に，勉強についての相談や授業についての質問ができます．予約，料金不要です．どんなことでもとりあえず行ってみよう．

曜	時間	部屋	(主な) 科目
月	12:30-13:30	1-615	数学 物理
水	12:20-13:20	1-602	情報
木	12:30-13:30	1-539	数学 情報
金	12:30-13:30	1-539	数学 物理

quiz 略解 2

$\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{B}$ の, $\boldsymbol{A}$ 向きの成分は, $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ との内積で求められ, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{-7}{\sqrt{6}}$.

今日の目標

- やじろべえがどっちにまわるかわかるようになろう.
- 外積の直観的な意味をわかろう.
- 3 次元空間の平行 4 辺形の面積, 平行 6 面体の体積が計算できるようになろう.

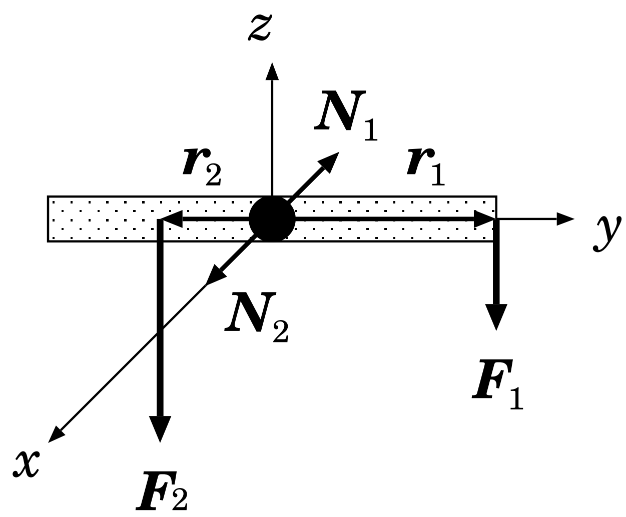
3. 回転のバランスと外積, ベクトル 3 重積

3.1 やじろべえ

香中 p.5,7

右の図のような原点で支えられたやじろべえが回転しない (つりあいの状態にある) 条件は,

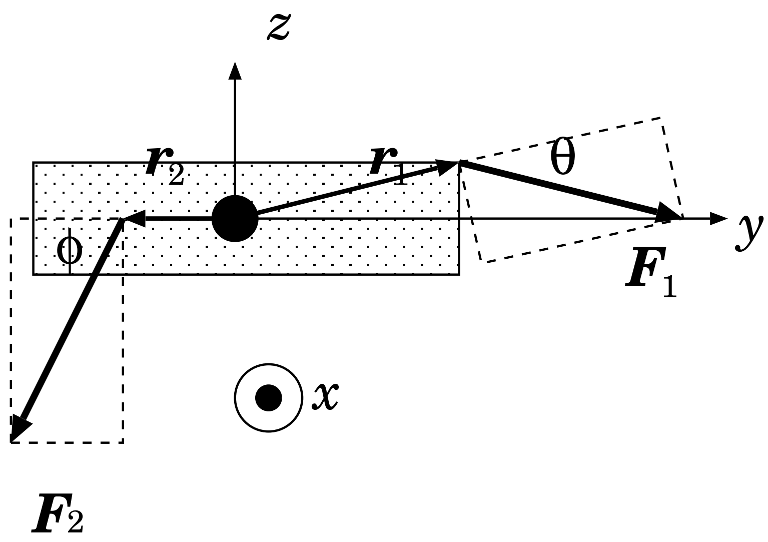
$$|\boldsymbol{F}_1| : |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \tag{33}$$



じゃあ, 斜めに引っ張る場合は?

$\boldsymbol{F}_1$ を，$\boldsymbol{r}_1$ に平行，垂直に分解して得られるベクトルを $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$, $\boldsymbol{F}_{1\perp}$ とする．

垂直なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\perp}$, $\boldsymbol{F}_{2\perp}$ がやじろべえの動きに効く．つりあいの条件は



$$|\boldsymbol{F}_{1\perp}| : |\boldsymbol{F}_{2\perp}| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (34)$$

つまり $$|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta : |\boldsymbol{F}_2|\sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (35)$$

実は，これはベクトルの外積を使うと便利に書ける． 香中 p.7

n **個の力がはたらいているとき，**

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n \tag{36}$$

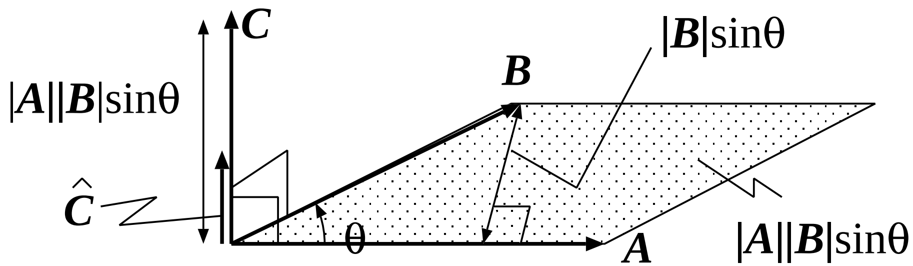
とおく．これらを，(原点のまわりの) **力のモーメント** **という．単位はニュートンメートル** $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$.

つりあいの条件は，力のモーメントの和がゼロになること:

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \cdots \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{0}} \tag{37}$$

上の $n=2$ **個の力の場合には，**

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}.$$



ここで，外積の定義を使う．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} =& |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|(\sin\theta)(-\boldsymbol{i}) + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|(\sin\phi)(+\boldsymbol{i}) \\
=& (-|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|\sin\theta + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|\sin\phi)\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

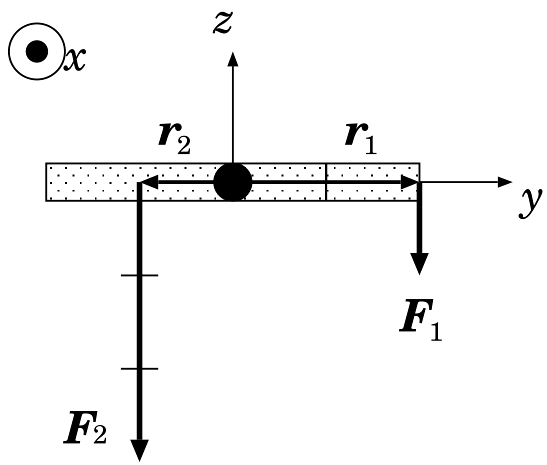
よって, 同じ式

$$
|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta : |\boldsymbol{F}_2|\sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \tag{38}
$$

が得られた.

3.2 やじろべえの回転する向き

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} =& \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ =& \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \neq& \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{39}$$

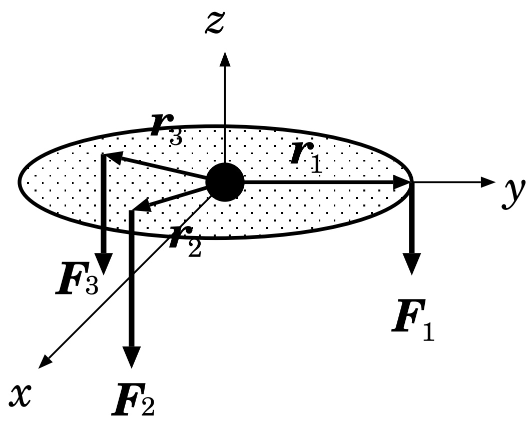


で, つりあっていないので回転する. でも, どっちに?

回転の向き

- 回転軸は N に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, N 向きに進む 22 の回る向き.

3.3 3 次元やじろべえと外積



立体的なやじろべえのときも同じ.

$N = 0$ ならつりあってる.

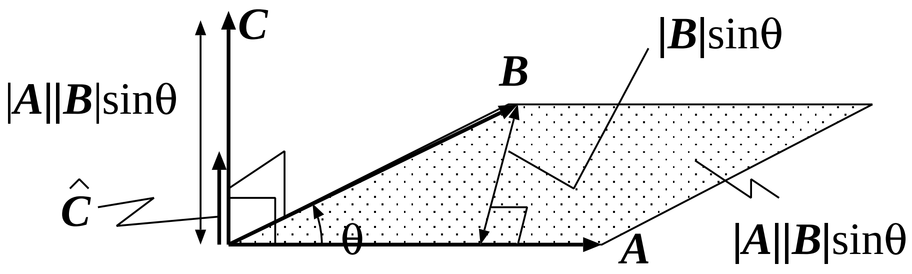
$N \neq 0$ なら,

- 回転軸は N に平行.
- 回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, N 向きに進む右ねじの回る向き. $\cdots$ $\boxed{\text{右ねじの向き}}$

3.4 外積ってけっきょく何?

A と B のはった網みたいなもの

- 2 本の棒 A, B を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $C = A \times B$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行 4 辺形の面積 が 23 .
  2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $F = I \times B$.



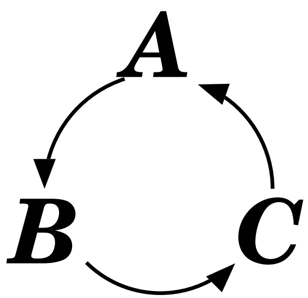
3.5 スカラー 3 重積

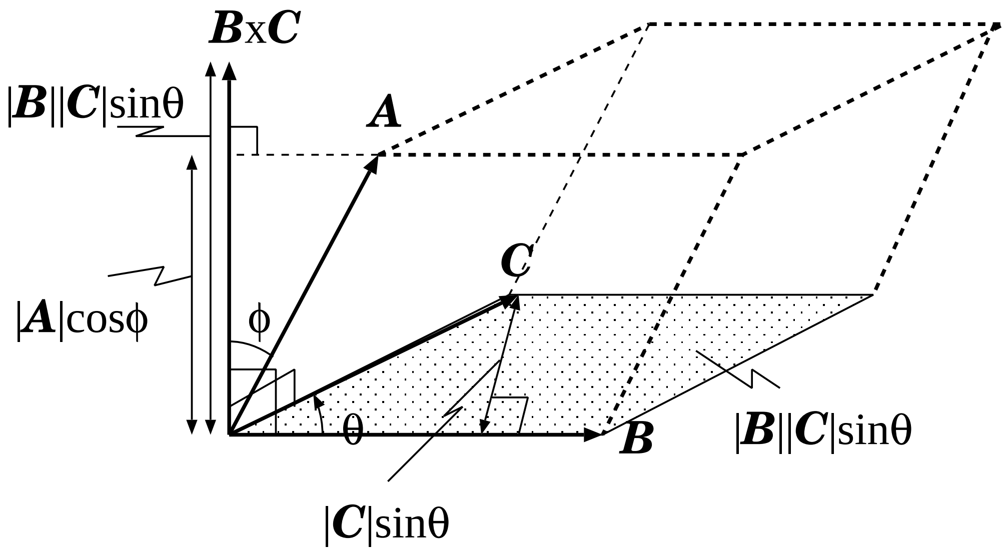
香中 p.7

$B \times C$ はベクトル．ということは，$A \cdot (B \times C)$ はスカラーになる．これをスカラー 3 重積という．

下の図から，絶対値 $|A \cdot (B \times C)|$ は，A,B,C を 3 辺とする $\boxed{\text{平行 6 面体の体積}}$.

体積だから，A, B, C を循環的に変えても等しい．





$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \boxed{24 \qquad\qquad} .$$

(40)

例題 6

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **とする**.

1. B, C **を** 2 **辺とする平行** 4 **辺形の面積を求めよう**.
2. A, B, C **を** 3 **辺とする平行** 6 **面体の体積を求めよう**.

25

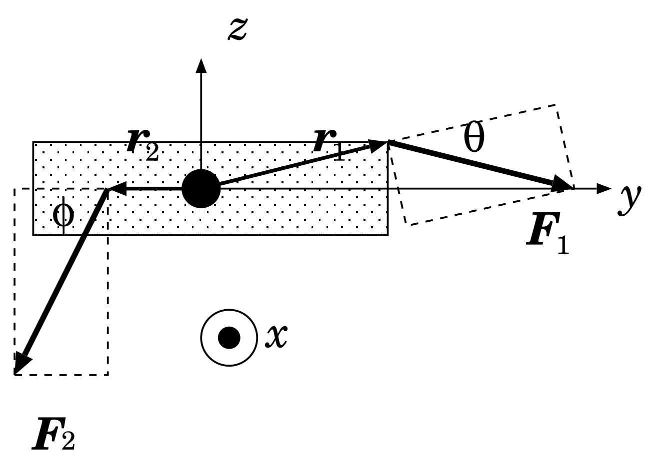
quiz 3

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

1. B, C を 2 辺とする平行 4 辺形の面積を求めよう.
2. A, B, C を 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよう.
3. B, C を 2 辺とする 3 角形の面積を求めよう. *Hint.* 平行 4 辺形を利用.
4. A, B, C を 3 辺とする 3 角錐の体積を求めよう. *Hint.* 平行 6 面体を利用.

quiz 4

原点を中心に回転するやじろべえを考える.
$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **の点に力** $\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **を**, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **の点に力** $\boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **を加える. 右の図** (**ベクトルは正確じゃないです**) **のように** x **軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.**



力のモーメントと外積の練習用 i/V/EZ アプリ

http://hig3.net/ > i/V/EZ アプリ > 力のモーメント

講義の動画ストリーミング

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます. 自宅での再生には Password が必要です.

UserID　　　　　　　　Password

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/07/12 Tue 14:33 hig"

quiz 略解 3

1. $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\4\\4\end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{17}$
2. $|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})| = |22| = 22$
3. 平行 4 辺形の面積の $\frac{1}{2}$ で, $\sqrt{17}$.
4. 4 角錐なら平行 6 面体の $\frac{1}{3}$. 3 角錐は底面が $\frac{1}{2}$ なので, $22\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$.

quiz 略解 4

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ であり, x 軸の正の向き. この向きに進む右ねじのまわる向きだから, 反時計回り.

---

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

4. ベクトル, 直線, 平面

今日の目標

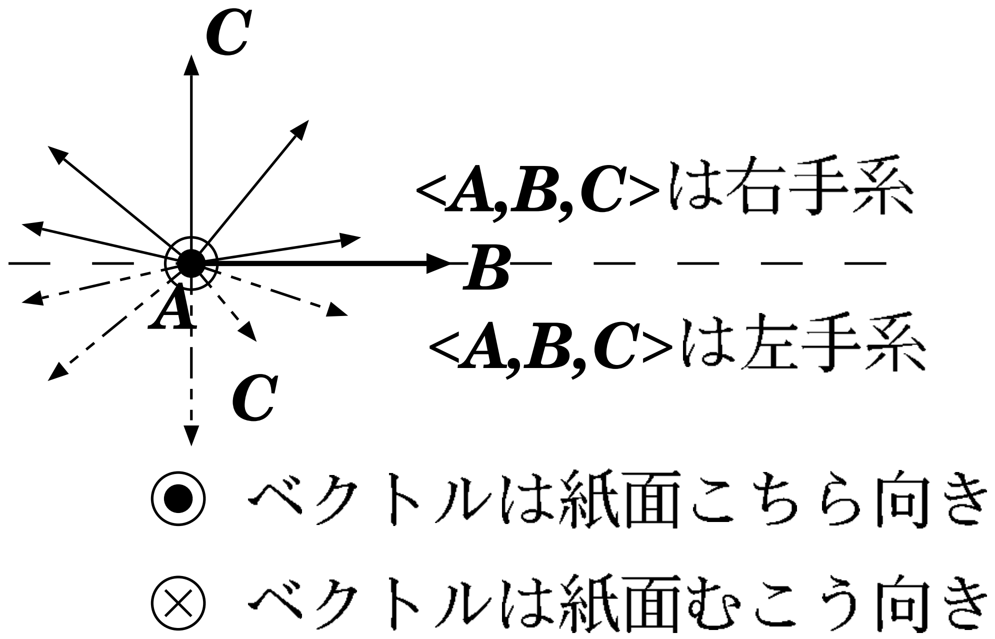
- スカラー 3 重積を利用して右手系左手系を区別できるようになろう
- ベクトルで直線と平面を表現できるようになろう

4.1 右手系と左手系

3 次元ベクトルの順序つきの 3 つ組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ を考える (順序つき, とは $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ と $\langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ とを異なるものとして区別すること).

- $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ が同一平面上にあるとき, 組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ は右手系でも左手系でもない.
- $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ が同一平面上にこないように注意して別々に動かしていって, $\boldsymbol{A}_1$ を右手親指, $\boldsymbol{A}_2$ を右手人差指, $\boldsymbol{A}_3$ を右手中指と重ねられるなら, 組 $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3 \rangle$ は右手系.

- 重ねられないなら組 $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ は左手系. (左手に重ねることができるとき, といっても同じこと).
- 右 (左) 手系を $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$ のように 26 入れ替えたものは右 (左) 手系のまま.
- $A \leftrightarrow B$ のように 27 した (互換という) ものは右手系から左手系 (あるいはその逆) にかわる.

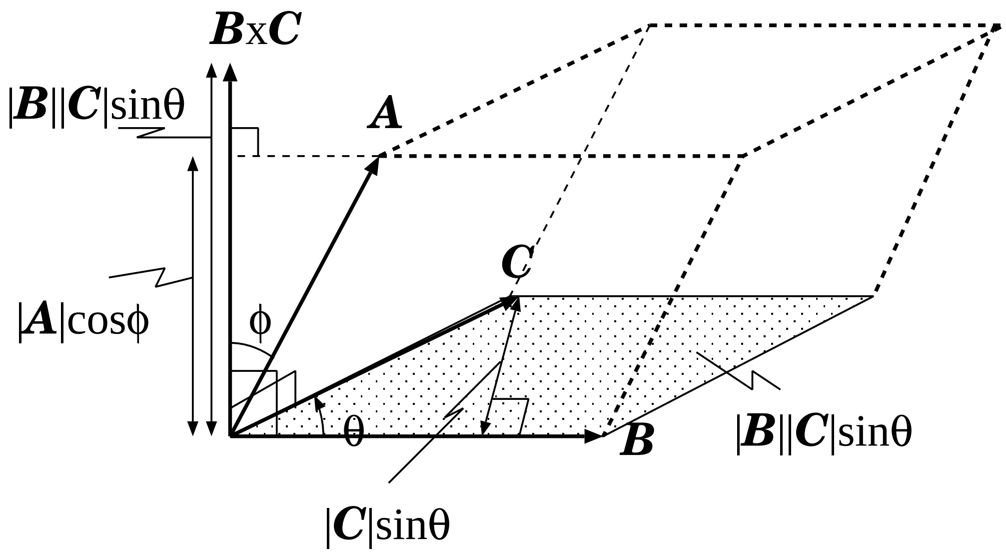


4.2 スカラー 3 重積による右手系と左手系

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})>0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\rangle$ が右手系.

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が 28

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})<0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\rangle$ が左手系.



例題 7

次の, ベクトルの順序つきの組を考える.

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{41}$$

1. **これは右手系か, 左手系かを答えよう.**
2. **これらを 3 辺とする平行 6 面体の体積を求めよう.**

29

4.3 スカラーとベクトルにまつわるいろんな演算

例題 8

A, B, C を上の例題と同じベクトルとする.

1. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
2. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$
3. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$

を, スカラー, ベクトル, 間違った式に分類しよう. 正しい式は値を求めよう.

30

31

4.4 ベクトルで表すいろんな図形

直線のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{C} \qquad (t \text{ はパラメータ}) \tag{42}$$

(平面内の) 直線の方程式

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = C. \qquad (C \text{ は定数}) \tag{43}$$

$\boldsymbol{n}$ は, 直線に直交する単位ベクトル.

$\boldsymbol{n} = \binom{a}{b}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by = C. \tag{44}$$

(空間の中の) 平面のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}s + \boldsymbol{C} \qquad (t, s \text{ はパラメータ}) \tag{45}$$

(空間の中の) 平面の方程式

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = C \qquad (C \text{ は定数}) \tag{46}$$

$\boldsymbol{n}$ は平面と直交する単位ベクトル, つまり単位 32 .

$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}$ で求められる.

$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C. \tag{47}$$

なぜ?

33

例題 9

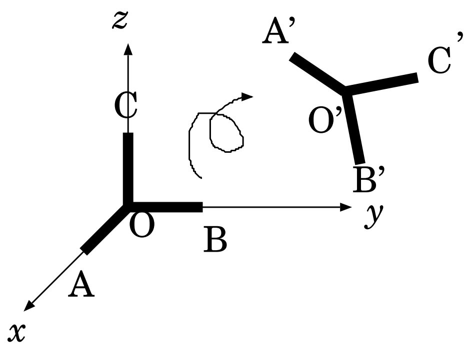
1. 単位法線ベクトルが $n = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であり, 点 $r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.
2. 単位法線ベクトルが $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, 点 $r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.

34

4.5 問題やってみよう

例題 10

最初, 3 本足の金具 OABC が原点に図のように置かれていた. この金具を曲げたり壊したりせずに, 空中に投げたところ, ある瞬間には, $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の向き, $\overrightarrow{\mathrm{O'C'}}$ は $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の向きになっていた.



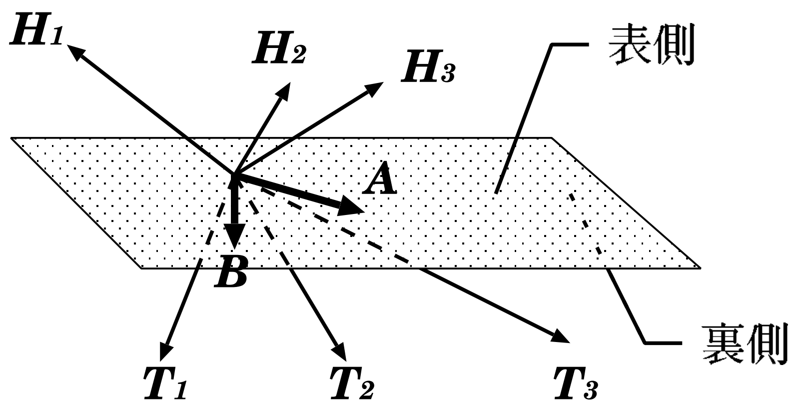
1. この瞬間の $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ の向きの単位ベクトルを求めよう.

Hint $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ は平面 O′B′C′ の法線ベクトル.

35

quiz 5

x, y, z 軸の正の向きの基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．



1. $|\boldsymbol{B}|$ を求めよう．

2. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ を求めよう．

3. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよう．

4. $\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A})$ を求めよう．

5. ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている．それは xy 平面とは異なる)．図は，その平面を斜めから見たものである．

   ベクトルがこの平面の表裏どちら側を向いているかについて，$\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなベクトルを表向き，$\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなベクト

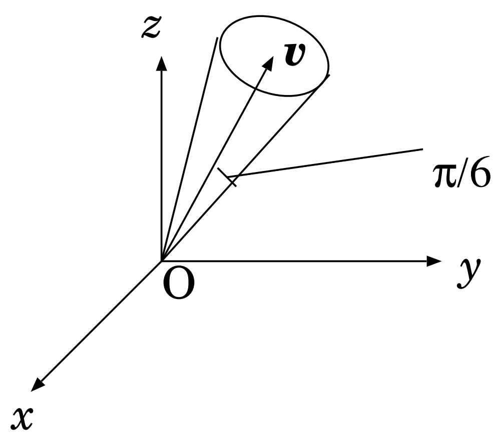
ルを裏向きということにする.

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ が裏向きか表向きか考えよう.

quiz 6

原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐を考えよう. ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.

2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix}$ である. この 2 点はそれぞれ, 円錐の内部, 表面上, 外部のどこにあるか答えよう.



教科書のお奨め問題

香中 1.4 章末問題 1.3, 1.4, 1.5, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12

今日の quiz の解答は今日中に Web に置きます.

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

quiz 略解 5

1. $\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$
2. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 = -3.$
3. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ +4 \end{pmatrix}$
4. $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\times 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} - (-1)(2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) =$ $2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ +8 \end{pmatrix}$
5. **図より, 表向きであるとは, $\langle \boldsymbol{p}, A, B\rangle$ が左手系であることとと同じ. ここで,**

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = -14 < 0 \tag{48}$$

よって, 表向き.

quiz 略解 6

2 つのベクトルのなす角が $\theta < \pi/6$ なら内部にある. $\theta \geqq 0$ のとき, $\theta < \pi/6$ と $\cos\theta > \sqrt{3}/2$ は同値.

1. $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ とすると, $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{p}|} = \frac{25}{27} > \sqrt{3}/2$. 内部.
2. $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ とすると, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} < 0$ より, $\theta > \pi/2$. 外部.

5. 運動のベクトルによる表現

香中 1 章と 2 章の間

5.1 位置ベクトル

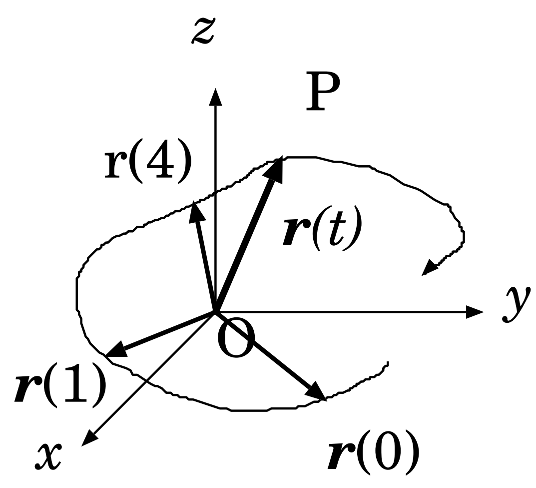
3 次元空間に物体 P があって運動している. 例:飛行機, ボール, 蚊, ...

座標系 xyz と原点 O は固定する. 運動の例 ⇒ アニメ

ある瞬間の物体 P の位置は, 36 を O, 37 を P とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で指定される. これを P の 位置ベクトル という.

空間を物体 P が時間 t とともに, 移動していくとき P の位置ベクトルは時間の関数なので, $\boldsymbol{r}(t)$ のように書く. たとえば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ \sin t \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

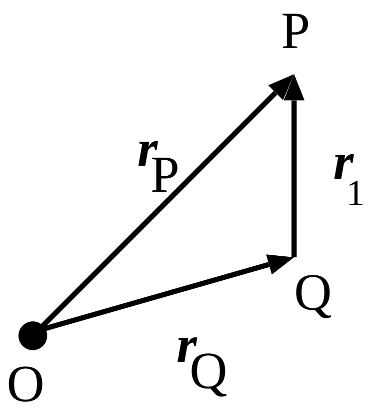


5.2 相対位置ベクトル

物体 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ 物体 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とする.

物体 Q に対する 物体 P の 相対位置ベクトル とは, Q から P に向かう矢印で表わされるベクトル $\boldsymbol{r}_1$ である. いわば,

38 .



このとき,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}.\text{つまり } \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}. \tag{50}$$

5.3 距離

$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{P}}(t) \\ y_{\mathrm{P}}(t) \\ z_{\mathrm{P}}(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Q}}(t) \\ y_{\mathrm{Q}}(t) \\ z_{\mathrm{Q}}(t) \end{pmatrix}$ とする．時刻 t の P と Q の間の 距離 は

$$|\boldsymbol{r}_1(t)| = |\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)|$$
$$= \left[(x_{\mathrm{P}}(t) - x_{\mathrm{Q}}(t))^2 + (y_{\mathrm{P}}(t) - y_{\mathrm{Q}}(t))^2 + (z_{\mathrm{P}}(t) - z_{\mathrm{Q}}(t))^2\right]^{1/2}. \tag{51}$$

時刻 t に P と Q が 衝突 する (52)

$$\Longleftrightarrow \text{時刻 } t \text{ に} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \tag{53}$$

$$\Longleftrightarrow x_{\mathrm{P}}(t) = x_{\mathrm{Q}}(t), y_{\mathrm{P}}(t) = y_{\mathrm{Q}}(t), z_{\mathrm{P}}(t) = z_{\mathrm{Q}}(t) \tag{54}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\;39\;} \tag{55}$$

例題 11

時間帯 $0 < t < \frac{3}{4}\pi$ **で, 位置ベクトルが**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

にしたがって運動する物体がある.

1. **点** $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ **に最も近づく時刻** t **を求めよう.**
2. **点** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **を, 物体が通過するならその時刻** t **を求めよう.**

40

5.4 運動の軌跡

xyz 空間内で, 物体が通過した点をつないでできる曲線を **軌跡** という.

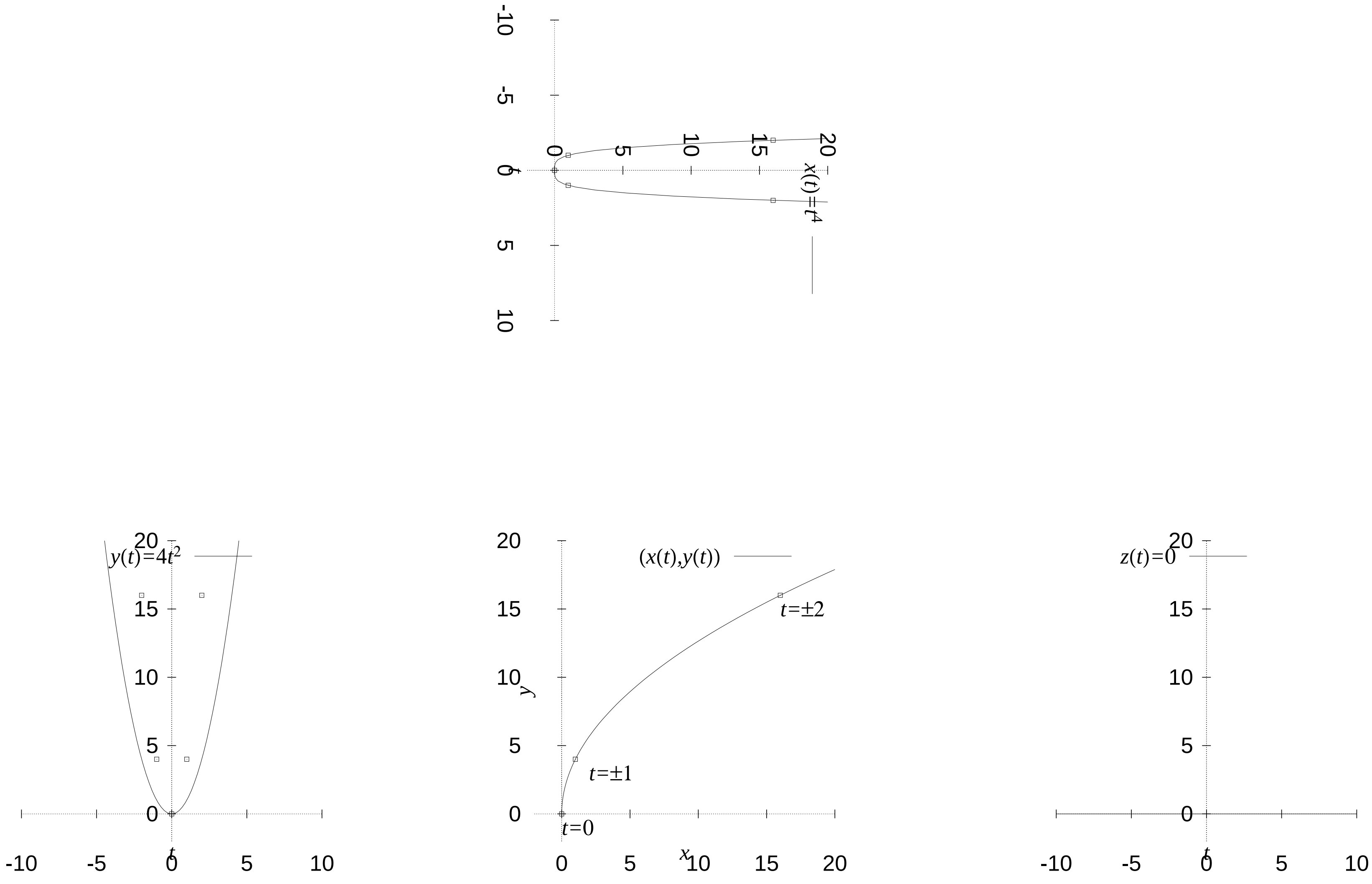
例題 12

空間を運動している物体 P の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ である. 軌跡を描こう. アニメ

41

5.5 t-x, t-y, t-z グラフ

時間 対, x, y, z **座標のグラフを描くとわかりやすいこともある**.



5.6 パラメータ表示と軌跡

一般に, t のような '余計な' 変数を使って $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ あるいは $x(t) = t^4, y(t) = 4t^2, z(t) = 0$ のように軌跡を表現する方法を $\boxed{\text{パラメータ表示}}$ という.

パラメータ表示から, 軌跡の方程式を導くことができる.

42

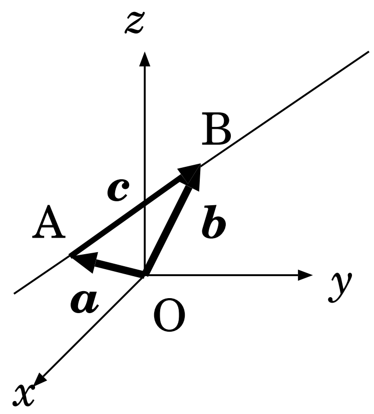
- 時刻 t を $\boxed{\text{パラメータ (助変数)}}$ とする $\boxed{\text{パラメータ表示}}$ では運動の様子がすべてわかるが, 物体の通過した道は見にくい.
- $\boxed{\text{軌跡の方程式}}$ では, 物体の通過した道がどのような形になっていたかわかるが, 通過した速さなどはわからない.

軌跡の方程式を求めるときには, 範囲がどうなっているか注意.

5.7 直線のパラメータ表示と方程式

2 点 A,B **を通る直線のパラメータ表示**. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ **とすると**,

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}t. \tag{57}$$



xy 平面内にあるとき

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **とする**.

$$x = a_1 + c_1 t \tag{58}$$

$$y = a_2 + c_2 t \tag{59}$$

$$z = 0. \tag{60}$$

t を消去すると,

$$\frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2}(=t), \qquad z=0. \tag{61}$$

整理すると

$$\text{平面の直線の方程式} \quad y = \frac{c_2}{c_1}(x-a_1)+a_2, \qquad z=0. \tag{62}$$

xyz 空間内の直線

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする.

$$x = a_1 + c_1 t \tag{63}$$

$$y = a_2 + c_2 t \tag{64}$$

$$z = a_3 + c_3 t \tag{65}$$

t を消去すると,

$$\text{空間の直線の方程式} \quad \frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2} = \frac{z-a_3}{c_3}(=t). \tag{66}$$

例題 13

時間帯 $0 < t < \pi$ で, 位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

にしたがって運動する物体がある.

1. 時刻 $t = \frac{\pi}{4}$ における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4})$ を求めよう.
2. y 軸を通過する時刻を求めよう.
3. 直線 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$ を通過するならその時刻を求めよう.
4. 平面 $y + z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を通過するならその時刻を求めよう.
5. 軌跡を描こう.
6. 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を, 物体が通過するならその時刻 t を求めよう.

アニメ

43

quiz 7

物体 P, Q の, 時刻 t における位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

で与えられる.

1. 時刻 $t = -2$ における P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(-2)$ を求めよう.
2. 物体 P が yz 平面 $(x = 0)$ 上にある時刻を求めよう.
3. 物体 P が 直線 $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = 0$ 上にくる時刻があれば求めよう.
4. 物体 P が 平面 $x + 2y + z = 2$ 上に来る時刻があれば求めよう.
5. 物体 P,Q の xy 平面 $(z = 0)$ 上の軌跡を描こう.
6. 物体 P と Q がもっとも接近する時刻 t と, その時の距離を求めよう.

プチテストは月曜日に返却します

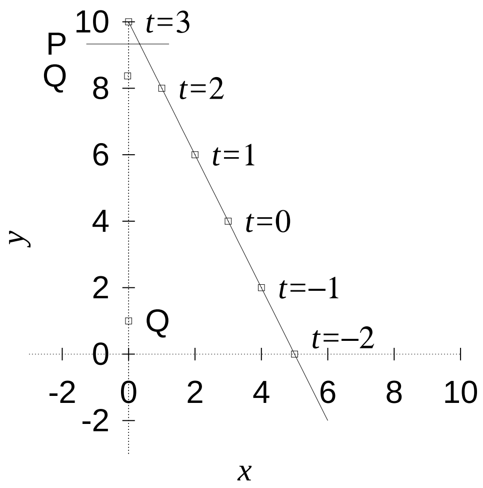
12 時 30 分以降です．点数はメールで連絡します．別のアドレスで受け取りたい人は，あらかじめアドレス変更してね．

科目のページ ＋ リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

quiz 略解 7

1. $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(-2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $(x(t) =) -t + 3 = 0$ を解いて, $t = 3$.
3. $\frac{-t-2}{2} = \frac{2t+4}{3} = 0$ を解いて $t = -2$.
4. $(-t+3) + 2(2t+4) + 0 = 2$ を解いて $t = -3$.
5. $x = -t + 3, y = 2t + 4$ から t を消去して, $y = -2x + 10, z = 0$. アニメ
6. 距離の 2 乗は $f(t) = 5t^2 + 6t + 18$. $f'(t) = 0$ を満す $t = -\frac{3}{5}$ で最小になり, このときの距離は $\sqrt{f(-\frac{3}{5})} = \frac{9}{\sqrt{5}}$. あるいは平方完成を利用.



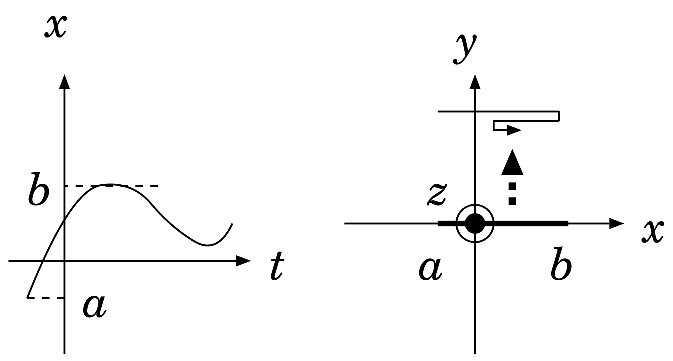
6. 速度ベクトルと加速度ベクトル

6.1 1 次元の運動

x-軸の式は $y = z = 0$ だから, x-軸の上だけを運動する物体の位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

となり, ただ 1 つの関数 $x(t)$ だけで表わせる. このように, 位置ベクトルの 1 成分だけで表わせる運動を 1 次元の運動という. 以下, しばらく 1 次元の運動を考える



1 次元の運動の t-x グラフと軌跡の関係

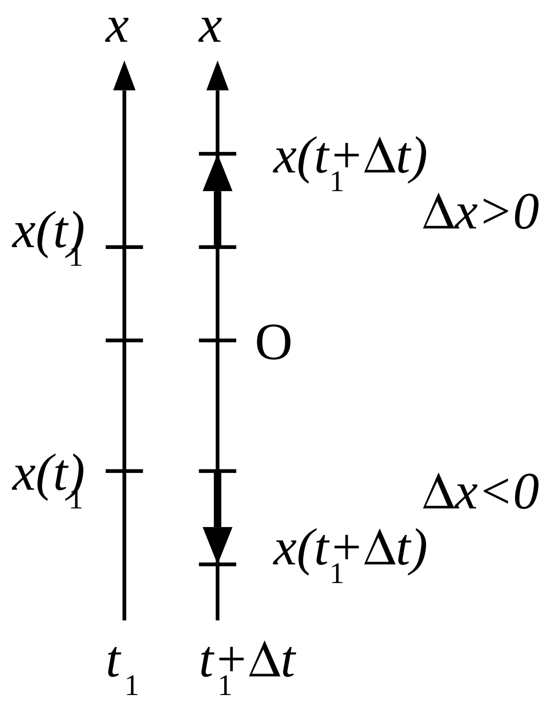
6.2 1 次元の速度

香中 p.26

時刻 t_1 に 座標 $x(t_1)$ にあった物体が, 時刻 $t_1+\Delta t$ には 座標 $x(t_1+\Delta t)$ まで移動していたとする. 座標の差 (変位ともいう) は

$$\Delta x = x(t_1+\Delta t) - x(t_1). \tag{70}$$

注: Δt **は** $\Delta \times t$ **じゃない**. Δt (**デルタティー**) **は短い時間を表わす変数**.



関係

$$(\textbf{距離}) = (\textbf{速さ}) \times (\textbf{時間}) \tag{71}$$

から,

$$(\textbf{時刻 } t_1 \textbf{ から } t_1 + \Delta t \textbf{ までの平均速度}) = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{72}$$

瞬間の速度を求めるには, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**.

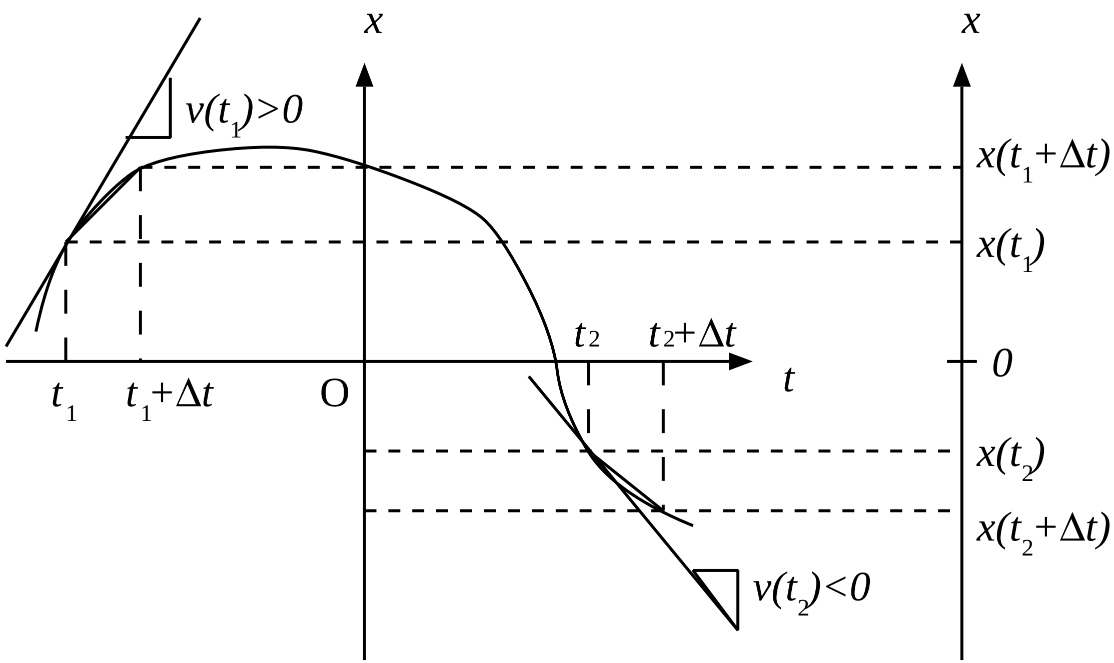
$$\textbf{速度 } v(t_1) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{73}$$

要するに, **座標** $x(t)$ **の** t **についての微分** (**導関数**) $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **を時刻** t **における物体の** $\boxed{\textbf{速度}}$ **という**.

本や人によっては, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **を**, $x'(t), \dot{x}(t)$ **などと書いてあることもある**.

バックしてるときは 速度は $\boxed{44\quad}$.

例 アニメ



速度 $v(t_1)$ は, $t=t_1$ における $x(t)$ の接線の傾き.

v	t-x グラフ	アニメ
$v>0$	右上がり	45
$v<0$	右下がり	46
$v=0$	水平	47

6.3 1 次元の加速度

香中 p.27

時刻 t_1 **に 速度** $v(t_1)$ **だった物体が**, **時刻** $t_1 + \Delta t$ **には 速度** $v(t_1 + \Delta t)$ **に変化していたとする**. **速度の変化分は**

$$\Delta v = v(t_1 + \Delta t) - v(t_1). \tag{74}$$

関係 (**変化率**) $=$ $\dfrac{(\textbf{変化分})}{(\textbf{時間})}$ **から**,

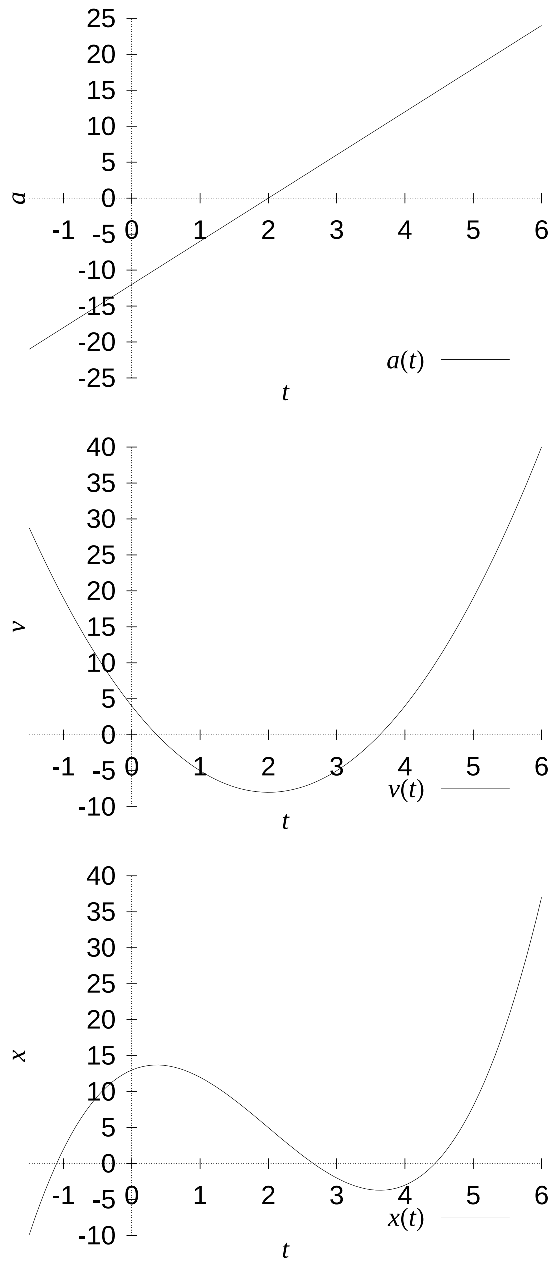
$$(\textbf{時刻 } t_1 \textbf{ から } t_1 + \Delta t \textbf{ までの速度の平均変化率})$$
$$= \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{75}$$

瞬間の変化率を求めるには, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**. **速度の瞬間の変化率のことを**

$$\textbf{加速度 } a(t_1) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \tag{76}$$

という．要するに，加速度は速度の 1 階微分，座標の 2 階微分．

本や人によっては，$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ を，$x''(t), \ddot{x}(t)$ などと書いてあることもある．



a	t 対 v	t 対 x	アニメ
$a > 0$	右上がり	48	速度増加
$a < 0$	右下がり	49	速度減少
$a = 0$	水平	50	速度一定

バックで加速してるときは　加速度は 51 ．

例 アニメ

再び, 3 **次元を運動する物体の位置ベクトル**

$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ **を考えよう**.

6.4 速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 **に 位置ベクトル** $\boldsymbol{r}(t_1)$ **にあった物体が**, **時刻** $t_1 + \Delta t$ **には 位置ベクトル** $\boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t)$ **まで移動していたとする**.

Δt **秒間の変位ベクトル**

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1) \tag{77}$$

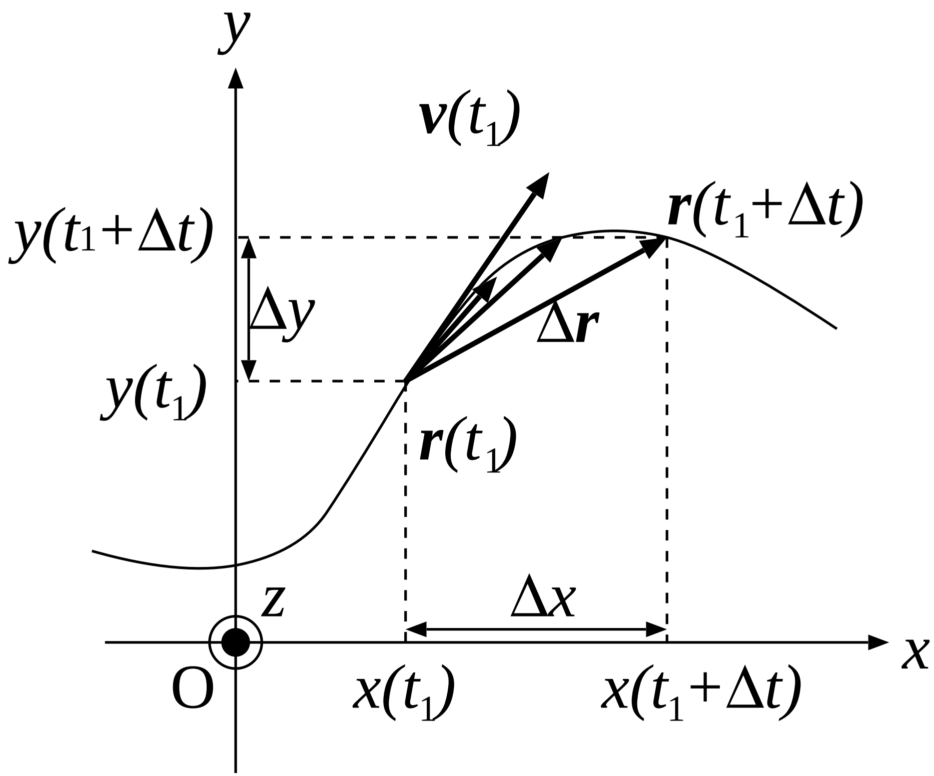
$$= (\Delta x)\boldsymbol{i} + (\Delta y)\boldsymbol{j} + (\Delta z)\boldsymbol{k} \tag{78}$$

Δt **秒間の平均速度ベクトル**

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t_1 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t}. \tag{79}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{80}$$

時刻 t_1 **における** (**瞬間**) **速度ベクトル** $\boldsymbol{v}(t_1)$ **を求めるには**, $\Delta t \to 0$ **の極限を考えればよい**.



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_1+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

要するに成分ごとに微分すればおっけー.

一般に, **時間の関数であるベクトル** (**ベクトル関数**) $\boldsymbol{A}(t)$ **があったとき**,

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_1)}{\Delta t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t_1)\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t_1)\end{pmatrix}} \tag{82}$$

を $\boldsymbol{A}(t)$ **の** $t=t_1$ **における微分といい**, $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t_1)}$ **と書く**.

つまり, **いまは** $\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$.

速さ

$$\text{時刻 } t_1 \text{ における速さ} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_1)\right|. \tag{83}$$

- 52 はベクトル．大きさと向きがある．
- 53 はスカラー．速度の絶対値．大きさだけ．

速度ベクトルの性質

- 速度ベクトルの向きは 54 ．(瞬間の向き)
- 速度ベクトルの大きさは，速さに比例．(瞬間の速さ)
- 物体が静止 $\Leftrightarrow$ 速度ベクトルが 55 $\Leftrightarrow$ 速さが零．

アニメ

6.5 加速度ベクトル

香中 p.30

時刻 t_1 における加速度ベクトル　$\boldsymbol{a}(t_1) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t_1)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t_1)\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

やっぱり成分ごとに微分すればおっけー．このベクトルを，

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t_1) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t_1)}$$

と書く．

アニメ	http://hig3.net> i/V/EZ **アプリ** > **いろんな運動**

例題 14

物体が, $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t+\sin t \\ 2t+2\sin t \\ \sqrt{5}\cos t \end{pmatrix}$ で運動している.

1. 速度ベクトル, 加速度ベクトルを求めよう.
2. 静止する時刻を求めよう.
3. 速さが最大となる時刻を求めよう.

56

微分の計算方法忘れた人は 香中 2.2, 微積分 2 章,5 章 **で復習!**

quiz 8

物体 P **が**, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} t^2-4 \\ -t^3+2 \\ -8t+3 \end{pmatrix}$ **で運動している**.

1. P **の速度** $\boldsymbol{v}(t)$, **加速度** $\boldsymbol{a}(t)$ **を求めよう**.
2. P **の速さが最小となる時刻を求めよう**.
3. P **の速さが最小である時刻における位置**, **速度**, **加速度を求めよう**.
4. **物体** Q **が**

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} t^2-4t \\ -t^3+2t \\ -8t \end{pmatrix} \tag{85}$$

で運動している. **物体** P **と** Q **が最も接近する時刻を求めよう**.

57

きょうのメッセージ

58

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{86}$$

教科書のお奨め問題

例題 2.2(p.30), 香中 2.7 章末問題 2.1,2.2,

講義のビデオ

UserID:　　Password:

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

全体	目次	前回	次回	略解

quiz 略解 8

1. $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -3t^2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6t \\ 0 \end{pmatrix}$

2. **速さを** $v(t)$ **とすると**, $f(t) = v(t)^2 = (2t)^2 + (-3t^2)^2 + (-8)^2$. **これが最小になる時刻を求める．微分して** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = 8t + 36t^3$. **増減表を書くと**, $t = 0$ **で最小**.

3. $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. **相対位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)$ **とおいたとき**, $|\boldsymbol{r}_1(t)|^2 = 20t^2 - 40t + 29$ **が最小になる時刻を求めればよく**, $t = 1$.

夏のプチテストやります! 06/23(**木**) **です．科目の成績** 100 **点のうち** 25 **点分．範囲などは掲示参照**.

先週のメッセージ

$\boxed{\textbf{位置}\ \boldsymbol{r}(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\textbf{速度}\ \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\textbf{加速度}\ \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \tag{87}$$

6.6 相対速度

物体 P,Q **の位置ベクトル**: $\boldsymbol{r}_\mathrm{P}(t), \boldsymbol{r}_\mathrm{Q}(t)$

物体 Q **に対する 物体** P **の相対位置ベクトル**: $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_\mathrm{P}(t) - \boldsymbol{r}_\mathrm{Q}(t)$

物体 Q **に対する 物体** P **の相対速度ベクトル**:

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \boxed{\color{cyan}{59}\qquad\qquad} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\mathrm{P}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\mathrm{Q}}{\mathrm{d}t}(t).$$

例題 15

物体 P, **物体** Q **の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ **とする**. **物体** P **の** Q **に対する相対速度の大きさがもっとも大きい時刻を求めよう**.

60

7. 位置速度加速度ベクトルと積分

香中 3 章

7.1 積分は微分の逆

変数 t **の関数** $f(t), F(t)$ **が,**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = f(t)} \tag{88}$$

を満たすとする (**例えば**, **位置** $x(t) = F(t)$, **速度** $v(t) = f(t)$). **このとき,**

$$\boxed{\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C.} \tag{89}$$

- $f(t)$ **は** $F(t)$ **の** (1 **階**) **微分**, 61
- $F(t) + C$ **は** $f(t)$ **の** (**不定**) **積分**, 62 , C **は積分定数**.

積分の計算法

香中 p.50　微積分 5.6

- 63 .
- 64 .
- **三角関数の積分**
- **指数関数の積分**
- **置換積分 (変数変換)**
- **部分積分**
- **公式集を見る**
- **いろんな超絶技巧**

7.2 速度の積分は位置

位置 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **速度** $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **に対して**,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v_1(t) \quad \text{だから} \quad x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t + C \tag{90}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{位置}\\ x(t)\end{array}} \;\begin{array}{c}\text{微分}\\ \longrightarrow \\ \text{積分} \\ \longleftarrow\end{array}\; \boxed{\begin{array}{l}\text{速度}\\ v_1(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\end{array}}$$

例題 16

1. **物体の速度が** $v_1(t) = t^2 - \sin(2t)$ **である. また**, $x(0) = 2$ **である.** $x(2\pi)$ **を求めよう.**

2. **物体の速度が** $v_1(t) = \frac{1}{t} - \cos(\pi t)$ **である. 最初** $t = 1$ **から 最後** $t = 2$ **までの座標の変位** $\Delta x = x(2) - x(1)$ **を求めよう.**

$x(0) = 2$ のような条件を, 65 という. 積分定数は, これを用いて決めることができる.

66

7.3 速度の定積分は変位

香中 p.64　微積分 4.2

$$F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t + C \tag{91}$$

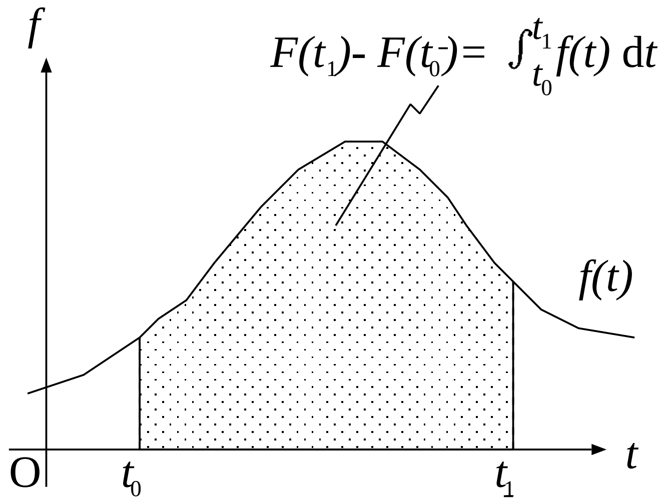
のとき,

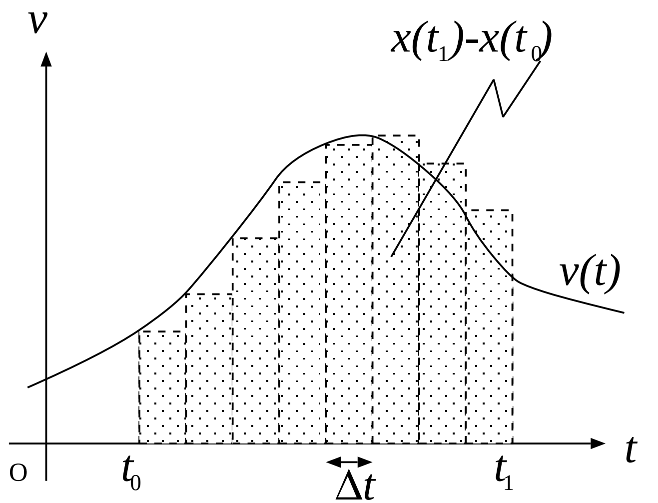
$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\mathrm{d}t \tag{92}$$

を定積分という．これは, $f(t)$ のグラフと $t = t_0$, $t = t_1$ で囲まれる部分の面積.
$t = t_0$ から $t = t_1$ までの x 座標の変位 Δx は

$$\boxed{\Delta x = x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\mathrm{d}t} \tag{93}$$

のように定積分で表わせる.





例題 16 の 1 の別解

$$\boxed{67} \quad . \tag{94}$$

7.4 速度ベクトルの積分は位置ベクトル

時刻 t の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とすると，速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{v}(t) \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \tag{95}$$

で与えられるのだった．したがって逆に，

$$x(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t + C_1, \tag{96}$$

$$y(t) = \int v_2(t)\mathrm{d}t + C_2, \tag{97}$$

$$z(t) = \int v_3(t)\mathrm{d}t + C_3. \tag{98}$$

C_1, C_2, C_3 **は積分定数．これをまとめて，次のようにかく．**

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{C}.\ (\textbf{ベクトル値関数の積分})} \tag{99}$$

7.5 加速度ベクトルの積分は速度ベクトル

同様に加速度ベクトルは, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}(t)$ **より**,

$$v_1(t) = \int a_1(t)\mathrm{d}t + D_1, \tag{100}$$

$$v_2(t) = \int a_2(t)\mathrm{d}t + D_2, \tag{101}$$

$$v_3(t) = \int a_3(t)\mathrm{d}t + D_3. \tag{102}$$

よって $\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{D}.}\ (\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}\ \textbf{は積分定数})$ (103)

例題 17

物体が，加速度 $\boldsymbol{a}(t)=\begin{pmatrix}-4\cos(2t)\\-2\sin(2t)\\0\end{pmatrix}$ で運動している．初期条件を速度 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とする．最も遅く動いている時刻とその速さを求めよう．

68

7.6 等速直線運動

加速度が 0, つまり, $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{0}$ の場合を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \end{cases} \underset{\leadsto}{\text{積分}} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = C_3 \end{cases} \underset{\leadsto}{\text{積分}} \begin{cases} x(t) = C_1 t + D_1 \\ y(t) = C_2 t + D_2 \\ z(t) = C_3 t + D_3 \end{cases} \tag{104}$$

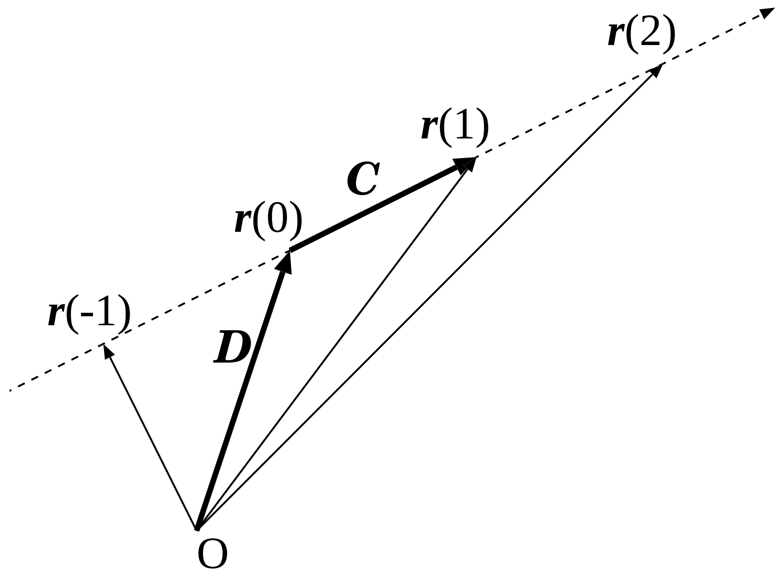
別の書き方では

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}, \leadsto \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{C}, \leadsto \boxed{\text{69}\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{105}$$

ただし, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ は積分定数.

これって直線のパラメータ表示.

等速直線運動 $\to$ **アニメ i/V/EZ アプリ**



軌跡の式は, t **を消去して**

$$\frac{x-D_1}{C_1}=\frac{y-D_2}{C_2}=\frac{z-D_3}{C_3}. \tag{106}$$

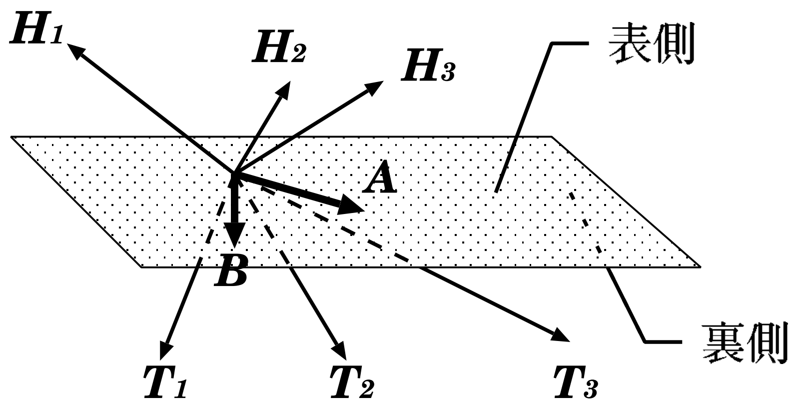
quiz 9

x, y, z 軸の正の向きの基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ とする．

ベクトル A, B の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている．それは xy 平面とは異なる)．下の図は，その平面を斜めから見たものである．

物体が平面の表裏どちら側にあるかについて，位置ベクトルが $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなものを表側，位置ベクトルが $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなものを裏側にあるということにする．



物体の，加速度ベクトルは，$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．また，この物体の運動は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす．

1. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう．

2. **物体が平面上にある時刻を求めよう.**

3. **物体の位置ベクトルが裏側にある時間の長さを求めよう.**

70

今週のメッセージ

71

教科書のお奨め問題

香中例題 3.1(p.51), 香中 3.7 章末問題 3.1, 3.8

講義のビデオ

UserID:

Password:

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

quiz 略解 9

1. 加速度は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -2$$

積分して,

$$x(t) = C_1 t + D_1$$
$$y(t) = C_2 t + D_2$$
$$z(t) = -t^2 + C_3 t + D_2$$

初期条件より,

$$x(t) = -t$$
$$y(t) = -t$$
$$z(t) = 1 - t^2$$

2. $\boldsymbol{r}(t)\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{r}(t)$ は平面上にある. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}(t)\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = -3t^2+2t+3$ より, $t = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.

3. $\boldsymbol{r}(t)\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) > 0$ のとき裏側にあるので, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} - \frac{1-\sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

8. いろいろな運動

加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ がいろいろな関数のときに, $\boldsymbol{r}(t)$ がどうなるか見てみよう.

8.1 等速直線運動

$\boldsymbol{a}(t) = 0$ の場合を考える.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = C_3 \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x(t) = C_1 t + D_1 \\ y(t) = C_2 t + D_2 \\ z(t) = C_3 t + D_3 \end{cases} \tag{107}$$

別の書き方では

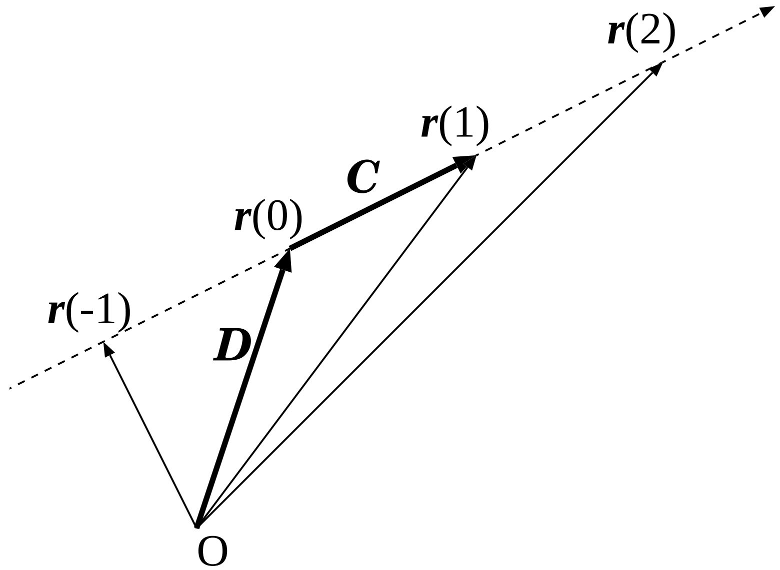
$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{C}, \rightsquigarrow \boxed{\text{72}} \tag{108}$$

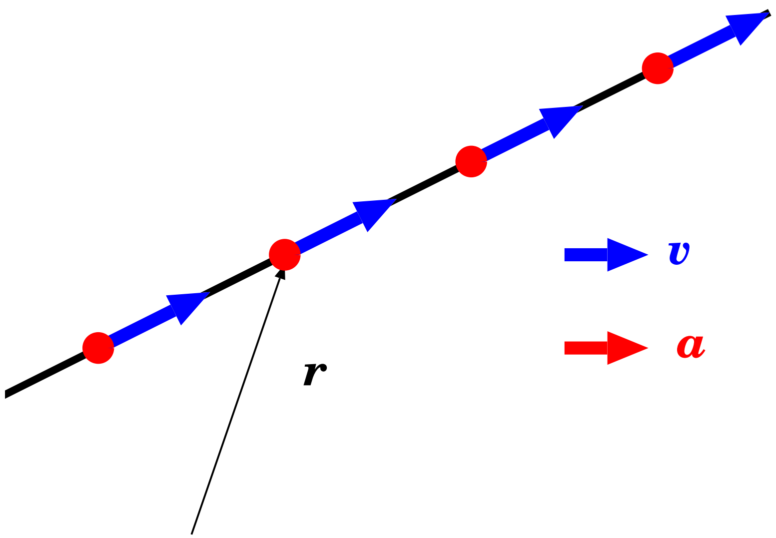
ただし, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ **は積分定数**.

これって直線のパラメータ表示.

軌跡 t **を消去して**

$$\frac{x - D_1}{C_1} = \frac{y - D_2}{C_2} = \frac{z - D_3}{C_3}. \tag{109}$$





等速直線運動 → **アニメ** i/V/EZ **アプリ**

8.2 等加速度運動 (=放物運動)

加速度の向き, 大きさが時間 t で変化しない (時間に依存しない ともいう), つまり, $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ が定数の場合を考える. 運動方程式から,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) &= A_1 & & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = A_1 t + C_1 & & x(t) = \frac{1}{2}A_1 t^2 + C_1 t + D_1 \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) &= A_2 & \rightsquigarrow \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = A_2 t + C_2 & \rightsquigarrow \quad & y(t) = \frac{1}{2}A_2 t^2 + C_2 t + D_2 \\ \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) &= A_3 & & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = A_3 t + C_3 & & z(t) = \frac{1}{2}A_3 t^2 + C_3 t + D_3 \end{aligned} \tag{110}$$

別の書き方では

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{C}, \tag{111}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\quad 73 \quad}$$

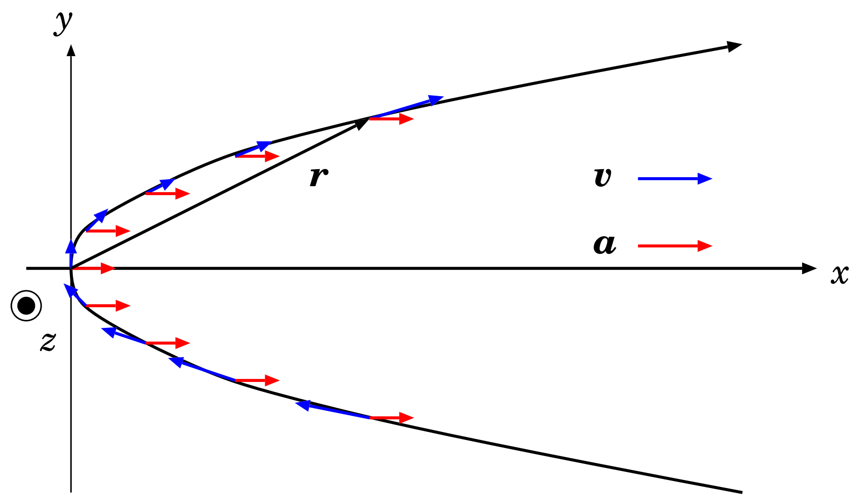
簡単のために, A, C, D **の各成分のうち**, A_1, C_2 **以外が零である場合を考える**.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}A_1 t^2, \\
y(t) &= \qquad\qquad\qquad +C_2 t, \\
z(t) &= 0.
\end{aligned}
\tag{112}
$$

軌跡 t **を消去して**,

$z = 0$, 74 .

つまり, xy **平面上の放物線**.



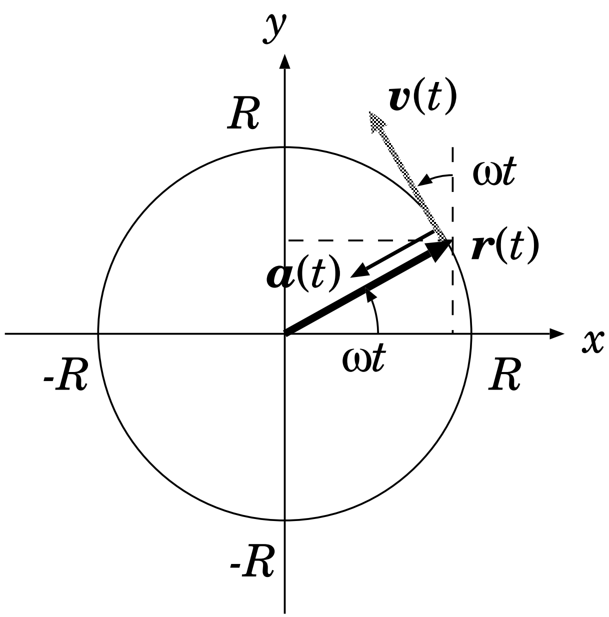
これは 等加速度運動 $\rightarrow$ **アニメ** i/V/EZ **アプリ**

8.3 等速円運動

なぜかこの場合は先に $\boldsymbol{r}(t)$ を考えます. $R, \omega > 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -R\omega^2 \cos\omega t & & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -R\omega \sin\omega t & & x(t) = R\cos\omega t \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) &= -R\omega^2 \sin\omega t & \overset{\text{微分}}{\longleftarrow} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = +R\omega \cos\omega t & \overset{\text{微分}}{\longleftarrow} & y(t) = R\sin\omega t \\
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) &= 0 & & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0 & & z(t) = 0
\end{aligned}
\tag{113}
$$

$\boldsymbol{r}(t)$ の向きは, x 軸の正の向きから 反時計回りにはかって ωt (時刻に比例)



軌跡

t を消去すると,$x^2+y^2 = R^2, z = 0$ **より**,

75

速度ベクトル

速さ $v = |\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)| = (R^2\omega^2\cos^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\omega t)^{\frac{1}{2}} = R|\omega|.$ (**一定**)

$\omega > 0$ **なら** 76 , $\omega < 0$ **なら** 77 **に運動**.

$\boldsymbol{r}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ **より**, **等速円運動では位置ベクトルと速度ベクトルは直交**.

速度ベクトルを位置ベクトルで表わそう

$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ **とおく** ($\boldsymbol{k}$ **は** z **軸の正の向きの単位ベクトル**), **このとき**,

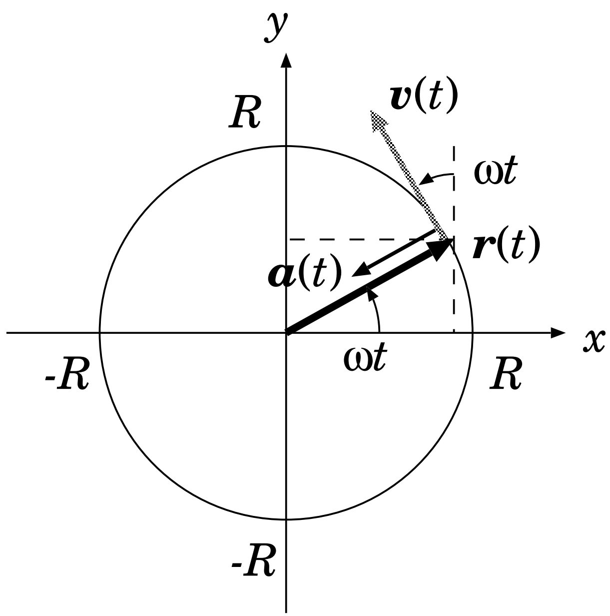
78 (**外積**) (114)

Check1: **大きさは** $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}(t)|\sin\frac{\pi}{2} = R\omega.$ **向きは**, $\boldsymbol{v}(t)$ **は**, $\boldsymbol{\omega}$,$\boldsymbol{r}(t)$ **の両方に垂直**, $\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t)\rangle$ **が右手系をなすことから決まる**.

Check2: $\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}R\cos\omega t\\R\sin\omega t\\0\end{pmatrix} =$ (**外積を成分で計算**) $= \begin{pmatrix}-R\omega\sin\omega t\\+R\omega\cos\omega t\\0\end{pmatrix}$

加速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \quad (115)$$



加速度の [79] は一定, [80] は一定でない.

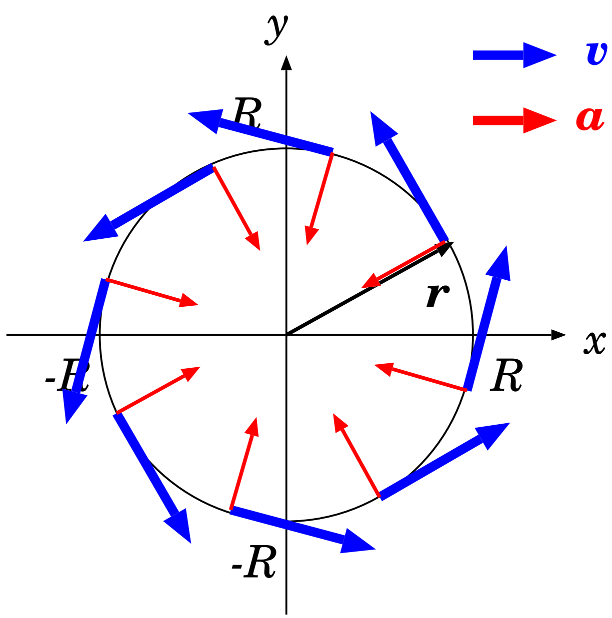
加速度の大きさ $|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$.(一定)

向きは $\boldsymbol{r}(t)$ と平行で逆向き.

つまり, 加速度は回転の中心を向いている

(向心加速度といわれる)

したがって, 速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ とは直交.



8.4 速さ一定の運動

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が, $|\boldsymbol{v}(t)| =$ 一定 であるとする. (等速運動) つまり, カーブも速さ (=速度の大きさ) 変えずに曲がる危ない運転. 速度の向きは変ってもいい. だから, ふつう 81 ではない.

→ アニメ i/V/EZ アプリ

$$|\boldsymbol{v}(t)| = C \quad (\text{一定}) \Rightarrow \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = C^2 \tag{116}$$

次のページのやり方にしたがって両辺を t で微分して

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)) \tag{117}$$

82

速度ベクトルと加速度ベクトルは直交 (どっちかが零ベクトルかも)

速さ v, **半径** R_1 , **速さ** v, **半径** R_2 **の円運動の加速度は** $\frac{v^2}{R_1}, \frac{v^2}{R_2}$

→ $\boxed{83}$ (**半径に反比例**)

8.5 内積, 外積, スカラー倍の微分

上では $\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$ **を微分したが**, **一般に**, $\boxed{\text{ス}}$**カラー値関数** $f(t)$ $\boxed{\text{ベ}}$**クトル値関数** $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t)$ **に対して**,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\boldsymbol{A}(t)) \qquad =\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{118}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ス}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)) =\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ス}} \tag{119}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t))=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{120}$$

つまり '**普通のスカラー関数の場合の積の微分法**' (**左だけ微分プラス右だけ微分**) **みたいな式が成立する**.

証明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{A}(t)] = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_1(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_2(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_3(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_1(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_2(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_3(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A_1(t)B_1(t) + A_2(t)B_2(t) + A_3(t)B_3(t)] \\ &= \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t)B_1(t) + A_1(t)\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t)B_2(t) + A_2(t)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t)B_3(t) + A_3(t)\frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t). \end{aligned}$$

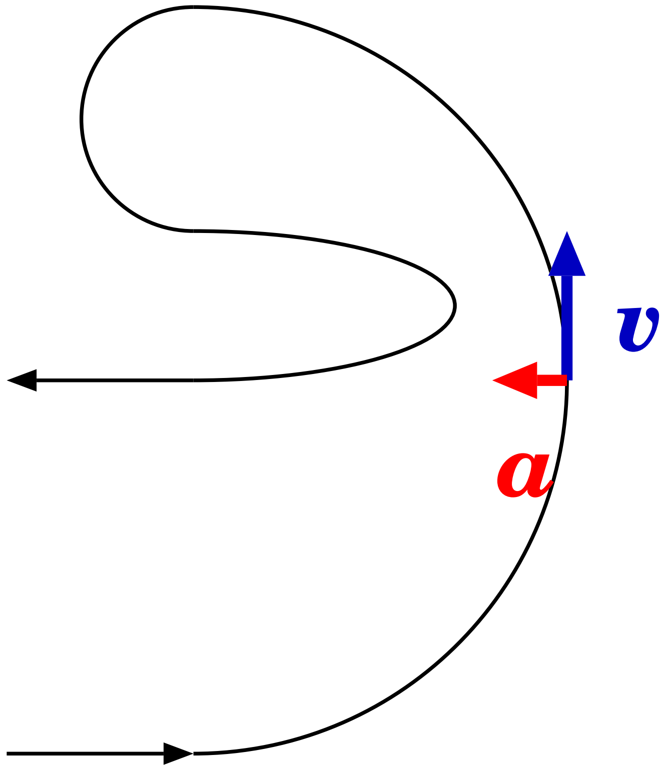
例題 18

運動の軌跡が原点を中心とする円周 (の一部) であるとき, 位置ベクトルと速度ベクトルはいつでも直交することを示そう.

84

quiz 10

曲線上を, 物体が, 矢印の向きで等速運動 (速さ一定の運動) している. 1 点について, 速度ベクトル v, 加速度ベクトル a が記してある. 他の点について, 速度ベクトル, 加速度ベクトルを書き加えよう. (零ベクトルになっている点では, • をうってね)



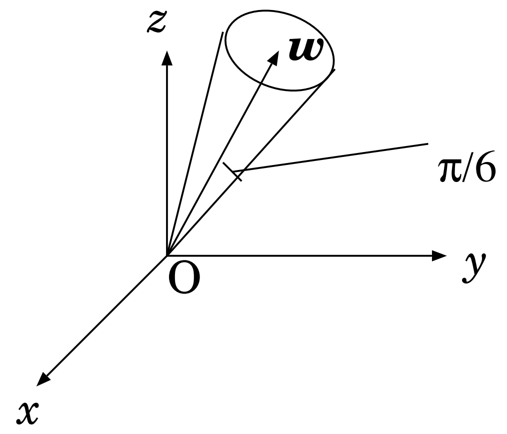
Hint:

- **全体が速さ一定の運動だけど, 一部分では等速直線運動, 等速円運動だよね.**
- **速度ベクトルは軌跡に接する.**
- **速さ v の等速円運動の加速度の大きさは $\frac{v^2}{R}$.**

quiz 11

原点にスポットライトがあり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 方向に, 広がりの角 $\frac{\pi}{6}$ で円錐状に広がる光を発している.

つまり, 光の当っている領域は, 原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐であり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.



質量 $m = 1$ の物体が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 6 \end{pmatrix}$ にしたがって運動している.

1. 物体の速度ベクトルと, 加速度ベクトルを求めよう.
2. 物体の速度ベクトルと, 位置ベクトルとのなす角が $\frac{1}{4}\pi$ である時刻を求めよう.
3. 物体に光が当っている時間帯を求めよう.

85

夏のプチテストやります! 来週 06/23 です. 25 点分です.

講義のビデオ

UserID:

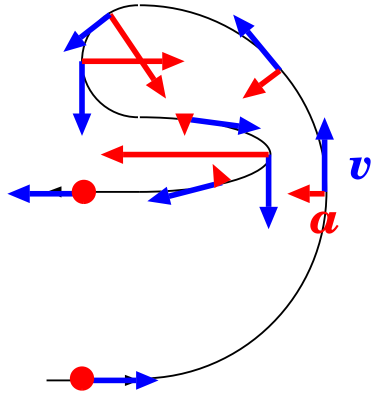
Password:

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

quiz 略解 10

速度ベクトルの方向は軌跡の接線方向．向きは進行方向．速度ベクトルの大きさは一定 (あらかじめ描いてあるものにそろえる)



加速度ベクトルの向きは, 速度ベクトルの向きに直交し, 鋭角側 (円形なら内側) 向き．加速度ベクトルの大きさは, 鋭く曲がっているところほど大きくなる．特に, 直線の部分では 0.

quiz 略解 11

1. 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2. $\frac{\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)||\boldsymbol{r}(t)|}=\cos\frac{1}{4}\pi$ を解くと, $t=\pm3\sqrt{2}$.
3. $\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{r}(t)|}>\cos\frac{1}{6}\pi$ を解くと, $-\sqrt{\frac{10}{3}}<t<+\sqrt{\frac{10}{3}}$.

9. 運動方程式と放物運動

9.1 ニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則)

香中 p.30

物体の加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ は, 物体の受ける 力 ベクトル $\boldsymbol{F}(t)$ で決まる.

加速度ベクトルの向き: 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の向きと同じ.

加速度ベクトルの大きさ: 質量 m に反比例, 力 $\boldsymbol{F}(t)$ の大きさに比例.

86 　(121)

これを ニュートンの運動方程式 という.

質量とは 質量の単位: kg (キログラム). 質量はスカラー.

水 1 リットルの質量は 1kg. 1 円玉の質量は 1g=0.001 kg.

基本ベクトル i, j, k を使って $\boldsymbol{F}(t) = F_1(t)\boldsymbol{i} + F_2(t)\boldsymbol{j} + F_3(t)\boldsymbol{k}$ と書くと

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_1(t), \tag{122}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_2(t), \tag{123}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_3(t). \tag{124}$$

きょうのメッセージ 1

位置	微分 → / 積分 ←	速度	微分 → / 積分 ←	加速度
$\boldsymbol{r}(t)$		$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$		$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$

87

成分ごとに微分積分すればおっけー. 積分定数 (ベクトル) C, D は初期条件から決まる.

例題 19

質量 $m = 2$ の物体が, 力

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{125}$$

のもとで運動している. 時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とする. 初期条件は

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{126}$$

である. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.

88

9.2 物理量と単位系

運動方程式 $m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t).$ x **成分は** $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_1(t).$ (127)

世の中の量には単位がある.

例	量	本家の単位	スペル	略記	邪道な単位
x	長さ	メートル	meter	[m]	尺, ヤード
m	質量	キログラム	kilogram	[kg]	オンス, ポンド
t	時間	秒	second	[s]	分, 年, 週
	電流	アンペア	ampere	[A]	
	角度	ラジアン	radian	[rad]	度

上の単位を基本として, 他の量の単位は, 上の単位の組み合せで作る. これを MKSA 単位系という. [kg 重] は邪道です.

例	量	作り方	単位	略記
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	速度	長さ/時間	メートル毎秒	[m/s]
	体積	(長さ)^3	立方メートル	[m^3]
	密度	質量/体積		[kg/m^3]
$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	加速度	速度/時間	メートル毎秒毎秒	[m/s^2]
F_1	力	質量 $\times$ 加速度		89

力 $F_1(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$, 加速度 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$.

1m/s^2 の加速度では, 速度が 1s に 1m/s 増加する.

1kg の物体が 1kg·m/s^2 の力を受けると 1m/s^2 の加速度で運動.

キログラムメートル毎秒毎秒 $\rightsquigarrow$ ニュートン [kg·m/s^2]$\rightsquigarrow$[N]

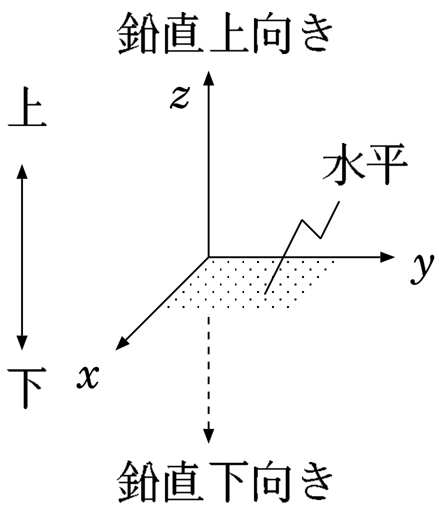
9.3 地球上でよく使う座標系

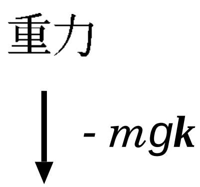
地球上には上下がある．物の落ちる方向を下という．

xyz **座標軸は，右手系で，** z **軸の負の向きが下になるようにとり，** x, y **軸はそれと直交するように (東西南北とは関係なく) 適当にとるのが普通．**

z **軸方向**　　90

xy **軸方向**　**水平方向 (** xy **平面は水平面)**





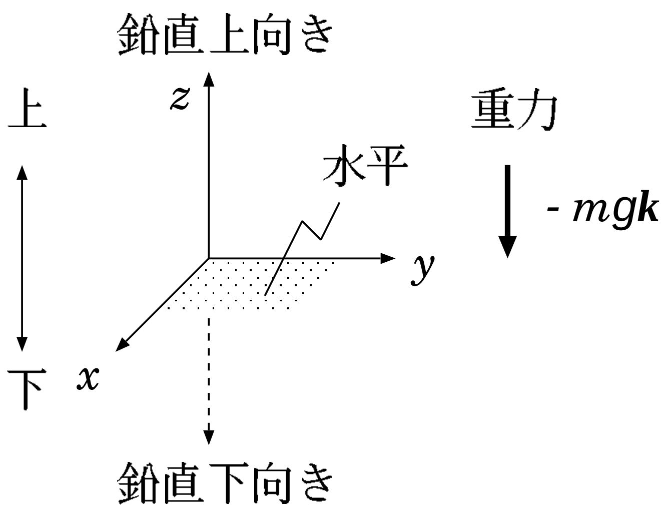
9.4 重力

香中 p.72

地球上の質量 m [kg] **の物体には, 重力という鉛直下向きの大きさ** mg **の力** 91 **がはたらく.**

$g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$: **重力加速度**

つまりの重力の大きさは $9.8m[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]=9.8m[\mathrm{N}]$.



ちょっと紛らわしいけど, 単位は立体フォント, 変数は斜体フォントで書く習慣. 手で書くときは気にしなくていい.
m **は質量,** m **はメートル.** g **は重力加速度,** g **はグラム.**

力の別の (邪道な) 単位

1[kg **重**] = 9.8 [N] = (**質量** 1kg **の物体に地球上ではたらく重力の大きさ**)

9.5 放物運動

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 運動方程式は,

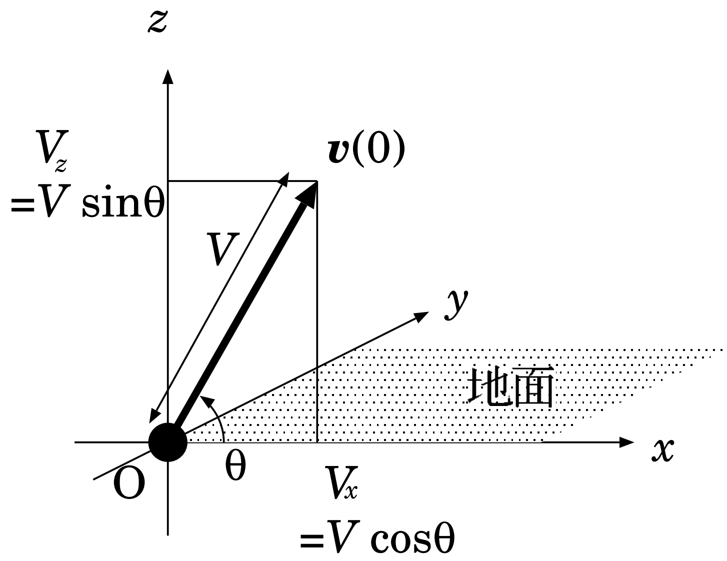
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\boldsymbol{k} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{92} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{93} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{94} \end{cases} \tag{128}$$

$$\overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = C_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -gt + C_3. \end{cases} \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x(t) = C_1t + D_1, \\ y(t) = C_2t + D_2, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + D_3. \end{cases}$$

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$: 積分定数.

これは等加速度運動 (放物運動). ‘水平 (x, y) 方向だけみると等速直線運動, 鉛直 (z) 方向だけみると等加速度運動.’

次のような初期条件で考えよう.



$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{129}$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} V\cos\theta \\ 0 \\ V\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \tag{130}$$

$(V > 0)$.

水平面 $z = 0$ を地面と思うと, この初期条件は次のような意味.

地面の点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から時刻 $t = 0$ に物を投げた.

初速度 $\boldsymbol{v}(0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)$ の向きは, xz 平面内で, 95
の向きで, 大きさは V.

初期条件は, (V_x, V_z) の組, あるいは (V, θ) の組で指定できる.

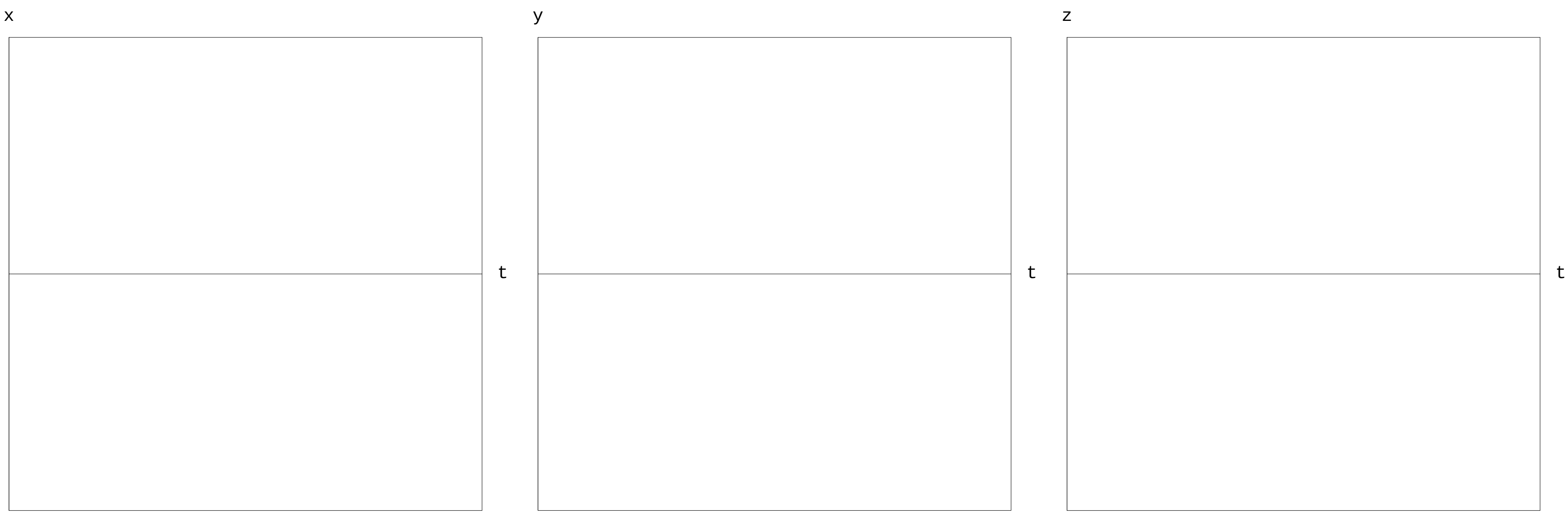
このときには,

$$x(t) = V_x t, \tag{131}$$

$$y(t) = 0, \tag{132}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t. \tag{133}$$

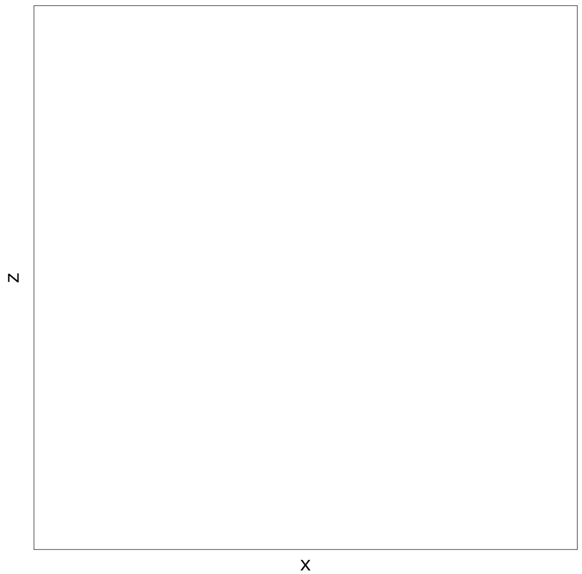
運動の様子アニメ i/V/EZ **アプリ**



xz 平面での運動の軌跡を考えよう.

(131),(133) から t を消去しよう. (131) から $t = x/V_x$ なので,

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_x}\right)^2 + V_z \left(\frac{x}{V_x}\right) \\
&= -\frac{g}{2V_x^2}\left[x^2 - 2\frac{V_x V_z}{g} x\right] \leftarrow \boxed{!} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_x^2}\left[\left(x - \frac{V_x V_z}{g}\right)^2 - \left(\frac{V_x V_z}{g}\right)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{V_x^2}(x - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}}
\end{aligned}
\tag{134}
$$



これは 96 ! ただし, $x_{\mathrm{m}} = \frac{V_x V_z}{g}$, $z_{\mathrm{m}} = \frac{V_z^2}{2g}$ とおいた.

$\boxed{!}$ を平方完成　$[x^2 - 2Ax] = [(x-A)^2 - A^2]$　(135)

9.6 ボールはゴールするか?

(131),(133) を使って考えよう.

でも, (131),(133) は覚えるのでなく, 導けるようにしてね.

例題 20

地面からのボールの高さが最大となる時刻を求めよう. そのときのボールの位置を求めよう.

97

例題 21

$V = 20$[m/s], $\theta = 30$[度] とする．このボールは, $x = 20$[m] にある高さ 10[m] の壁を越えるか?

98

関数電卓の i/V/EZ アプリ

quiz 12

質量 $m = 3$ **の物体が**, **力**

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} -12\cos(2t) \\ -6\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{136}$$

を受けて運動している. **初期条件を** $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **とする**. $\boldsymbol{r}(t)$ **を求めよう**.

99

quiz 13

$V = 10$[m/s], $\theta = 60$[度] とする．位置 $x = 20$[m] には高さ 2.44[m] のクロスバーがある．ボールはゴールするか (ノーバウンドで) 判定しよう．

100

講義のビデオ

UserID:

Password:

全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net

quiz 略解 12

運動方程式は $3\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -12\cos 2t \\ -6\sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$. 積分して

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t + C_1 \\ \cos 2t + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t + C_1 t + D_1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix}$. 初期条件より

$C_1 = 2, C_2 = -1, C_3 = 2, D_1 = -1, D_2 = 0, D_3 = 0.$

quiz 略解 13

初速は $V_x = 5[\mathrm{m/s}]$, $V_z = 5\sqrt{3}[\mathrm{m/s}]$. $x(t) = 20$ となる時刻 $t = T$ [s] を求めると, $T = 4[\mathrm{s}]$. $z(4) = -\frac{1}{2}g \cdot 4^2 + 5\sqrt{3} \cdot 4 = -44[\mathrm{m}]$ なのでバウンドしてしまう.. 有効数字 2 桁なので, 3 桁までとって計算し, 最後に四捨五入する.

10. 等速円運動と単振動

10.1 単振動

質量 m の物体の, x 軸上の運動

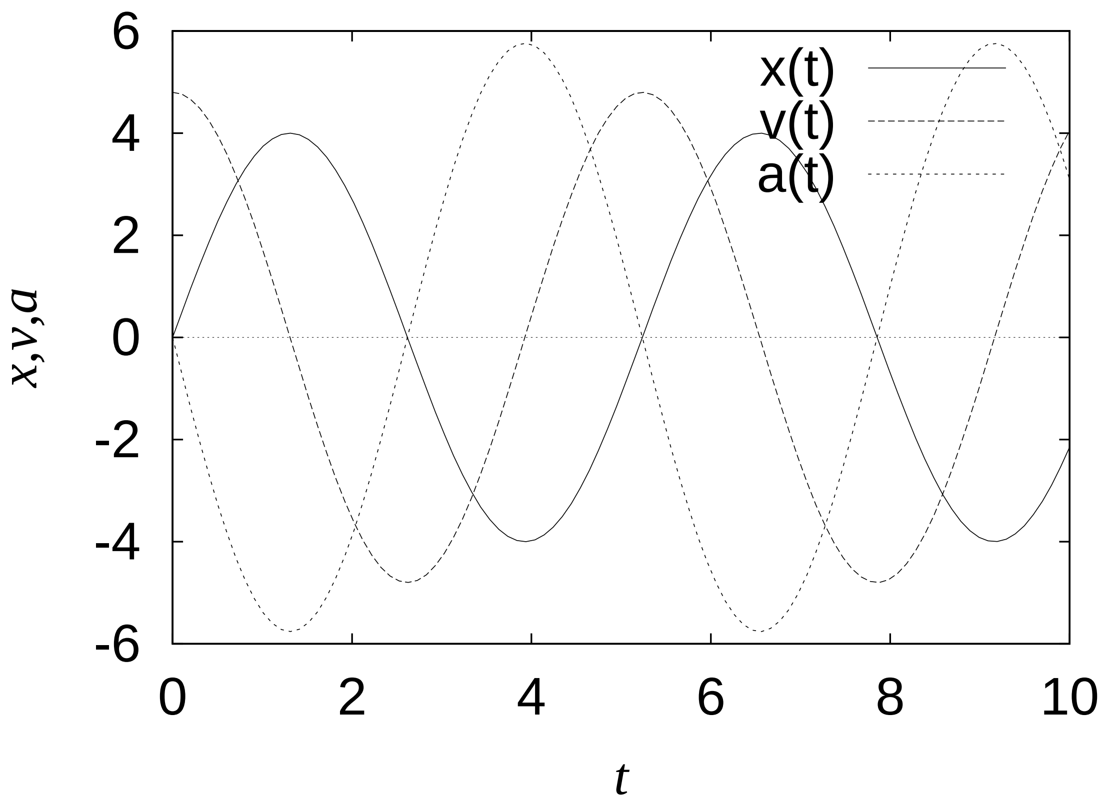
位置
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{137}$$

を x 軸上の 単振動, 調和振動 という. ただし, $R(>0), \omega, \phi$ は定数.

速度
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{138}$$

加速度
$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{139}$$

力
$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{140}$$



アニメ i/V/EZ アプリ

単振動のいろんな量 ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)
R	[m]	振幅/半径	原点からの最大距離
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりの位相の変化
ϕ	[rad]	初期位相	時刻 $t = 0$ における位相
$\omega t + \phi$	[rad]	位相	cos の引数
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	[s]	周期	もとの位置，速度にもどるまでの時間
$f = \frac{1}{T}$	[1/s] = [Hz]	振動数	単位時間に何回振動するかという数

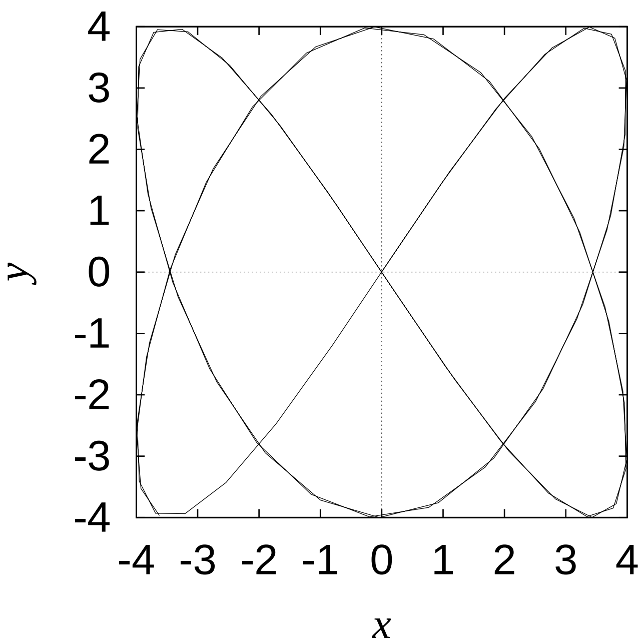
10.2 単振動の組みあわせ—リサジュー運動

x, y 軸方向に，それぞれ単振動している物体を考えよう．運動

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ R_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{141}$$

を リサジュー運動 という．ただし，$R_i > 0, \omega_i, \phi_i$ は定数．

軌跡の例．



i/V/EZ アプリ

http://hig3.net > 物理数学☆

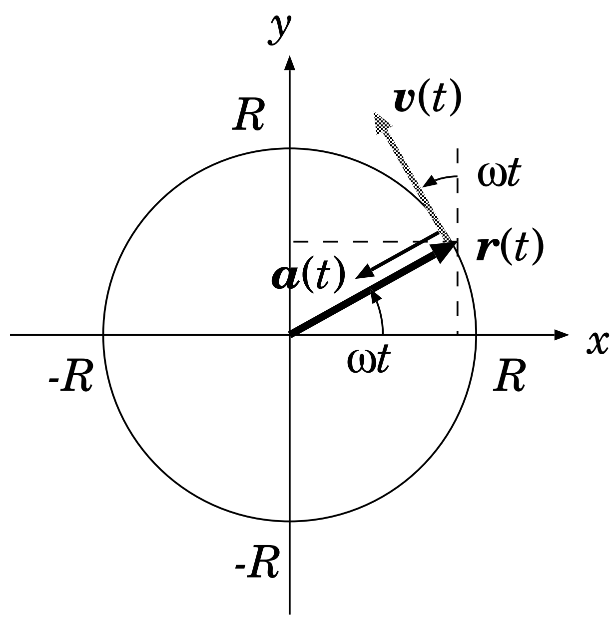
演習 I > リサジュー運動

10.3 等速円運動

リサジュー運動の特別な場合 $R = R_1 = R_2, \omega = \omega_1 = \omega_2,$ $\boxed{\phi_1 = 0, \phi_2 = -\frac{1}{2}\pi}$ **を考えよう**. $\cos(\omega t - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\omega t)$.

位置ベクトル

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.} \qquad (142)$$



軌跡 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ **より**, xy **平面上の半径** R **の円**.

$\boldsymbol{r}(t)$ **の向きは**, x **軸の正の向きから 反時計回りにはかって** ωt (**時刻に比例**)

これは等速円運動. 等速円運動の x **座標, または** y **座標だけを見ると単振動になっている**.

i/V/EZ アプリアニメ

http://hig3.net > 物理数学☆演習 I > 単振動と等速円運動

速度ベクトル

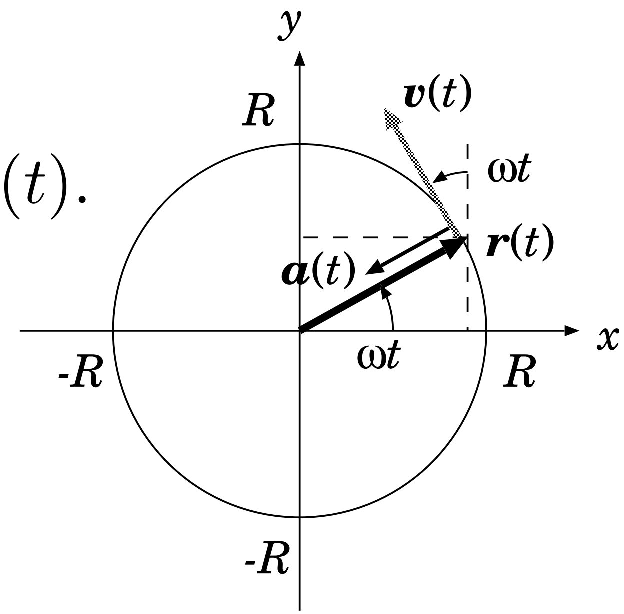
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ +R\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{143}$$

加速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \boldsymbol{r}(t). \tag{144}$$

等速円運動を引き起こす力

$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} -mR\omega^2\cos\omega t \\ -mR\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t). \tag{145}$$



力の [101] **は一定,** [102] **は一定でない.**

力の大きさ $\left|m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)\right| = mR\omega^2$.(**一定**)

向きは $\boldsymbol{r}(t)$ **と平行で逆向き.**

つまり, 力は回転の中心を向いている (向心力といわれる)

したがって, 力と速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **とは直交. これは等速運動すべてに成り立つ性質なのだった (夏のプチテスト** 3)

ちょっと一般化

$\phi_1 = \phi, \phi_2 = \phi - \frac{1}{2}\pi$. ϕ:**新しい定数. いままでは** $\phi = 0$ **としてた.**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ R\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ R\sin(\omega(t+\frac{\phi}{\omega})) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

これも等速円運動.

時刻 $t = 0$ **の位置が** $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **でなく,** $\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ **になっただけ.**

あるいは, $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **となる時刻が,** $t = 0$ **から** 103 **にずれただけ (出発時刻の変更).**

等速円運動のいろんな量 ちょっとたいへんだけどおぼえよう.

記号	単位	名前	意味 (単振動)	(等速円運動)
R	[m]	振幅/半径	原点からの最大距離	半径
ω	[rad/s]	角速度	単位時間あたりの位相の変化	単位時間あたりの位相の変化
ϕ	[rad]	初期位相	時刻 $t=0$ における位相	時刻 $t=0$ における位相
$\omega t+\phi$	[rad]	位相	$\cos$ の引数	x 軸からはかった角.
$T=\frac{2\pi}{\omega}$	[s]	周期	もとの位置, 速度にもどるまでの時間	一周するまでの時間
$f=\frac{1}{T}$	[1/s] $=$ [Hz]	振動数	単位時間に何回振動するかという数	単位時間に何周するかという数

位置, 速度, 加速度ベクトルの大きさの間には,

$$|\boldsymbol{r}(t)| = R, \tag{147}$$

$$|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)| = R\omega, \tag{148}$$

$$|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)| = R\omega^2 \left(= \frac{|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)|^2}{R} \right) \tag{149}$$

などの関係があることがわかる. これらはおぼえなくてよい. $\boldsymbol{r}(t)$ の式 (142) だけ書ければ, 微分して全部出せるから.

例題 22

30 秒に 1 回転しているメリーゴーラウンドがある．中心から 10[m] のところで白馬に乗っている人は円運動している．この人の角速度を求めよう．速さと加速度の大きさを求めよう．

104

10.4 単位のはいった計算

略記:

キログラムメートル毎秒毎秒 $\rightsquigarrow$ **ニュートン** $[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]\rightsquigarrow[\mathrm{N}]$

ニュートンメートル毎アンペア毎秒 $\rightsquigarrow$ **ボルト** $[\mathrm{N{\cdot}m/(A{\cdot}s)}]\rightsquigarrow[\mathrm{V}]$

等式, **不等式の両辺は必ず同じ単位になる**.

キロ, **ミリなどは**, **単位の大きさを** 10^n **倍変える接頭語**.

倍率	接頭語		使用例
10^9	ギガ	G	ギガバイト,
10^6	メガ	M	メガヘルツ
10^3	キロ	k	
10^2	ヘクト	h	ヘクタール =ヘクト アール
10^1	デカ	da	

倍率	接頭語		使用例
10^{-1}	デシ	d	デシリットル
10^{-2}	センチ	c	
10^{-3}	ミリ	m	
10^{-6}	マイクロ	μ	
10^{-9}	ナノ	n	

例題 23

加速度の大きさ $36\mathrm{km}/$**分** ^{2} **は**, $\mathrm{m/s^2}$ **でいうと**?

105

quiz 14

音楽 CD(**直径** 12cm) **は**, (**全曲の始めごろには**) **毎分約** 500 **回転している**. **このときの角速度** ω [rad/s] **と振動数** f [1/s] **を求めよう**. CD **の縁の部分は**, **どれだけの速さで動いているか求めよう**.

注 **平均** 48 **倍速の** CDROM **は**, **この約** 48 **倍の速さです**.

quiz 15

物体 1 が, xy 平面内で, 原点を中心とする等速円運動をしている. 半径は 2, 振動数は $\frac{1}{12}$ で, 運動の向きは, (右手系の) z 軸の正の向きから見て反時計回りである. 時刻 $t=0$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ である.

1. 初期位相を, 初期条件から定めて, $\boldsymbol{r}(t)$ の式を求めよう.
2. 物体 1 が直線 $y=-x, z=0$ 上にくる時刻を求めよう.
3. 物体 1 は直線 $y=-x, z=0$ の, $-2 \leqq x \leqq -1$ の部分を通過するか判定しよう.
4. 物体 2 が

$$\boldsymbol{r}_2(t)=\begin{pmatrix}\cos(2\pi t)\\ \sin(2\pi t)\\ 0\end{pmatrix} \tag{150}$$

にしたがって運動している. 物体 1 と物体 2 がもっとも接近する時刻と, そのときの距離を求めよう.

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

講義のビデオ

UserID:

Password:

http://hig3.net

全体	目次	前回	次回	略解

quiz 略解 14

$\omega = 500 \times 2\pi[\mathrm{rad}]/60[\mathrm{s}] = \frac{50\pi}{3}[\mathrm{rad/s}]$.

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{3}\ [1/\mathrm{s}]$.

速さ $= R\omega = 0.06[\mathrm{m}] \times \frac{50\pi}{3}[\mathrm{rad/s}] = \pi[\mathrm{m/s}] = 3.1[\mathrm{m/s}]$.

48 **倍速** CDROM **の速さ** $= 48 \times 3.1[\mathrm{m/s}] \times \frac{3600[\mathrm{s}]}{1[\mathrm{h}]} \times \frac{1[\mathrm{km}]}{1000[\mathrm{m}]} = 540[\mathrm{km/h}]$

quiz 略解 15

1.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{1}{6}\pi t + \phi) \\ 2\sin(\frac{1}{6}\pi t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

初期条件より $\phi = \frac{5}{4}\pi$. ($+2n\pi$ **はあってもなくても可**)

2. $y(t) = -x(t)$ **より**, $\tan(\frac{1}{6}\pi t + \frac{5}{4}\pi) = -1$ **よって**,

$\frac{1}{6}\pi t + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$ (n **は整数**). **よって**,
$t = -3 + 12n, 3 + 12n$.

3. $\boldsymbol{r}(-3+12n) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **であり**, **通過する**.

4. **時刻** t **における距離の** 2 **乗を考える**.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_2(t)|^2 =& (2\cos(\tfrac{1}{6}\pi t + \tfrac{5}{4}\pi) - \cos(2\pi t))^2 \\ & + (2\sin(\tfrac{1}{6}\pi t + \tfrac{5}{4}\pi) - \sin(2\pi t))^2 \\ =& (\textbf{加法定理}) = 5 - 4\cos(-\tfrac{11}{6}\pi t + \tfrac{5}{4}\pi). \end{aligned}$$

よって, **距離は** $t = \frac{15}{22} + \frac{12}{11}n$ **で最小値** $\sqrt{1}$ **をとる**.

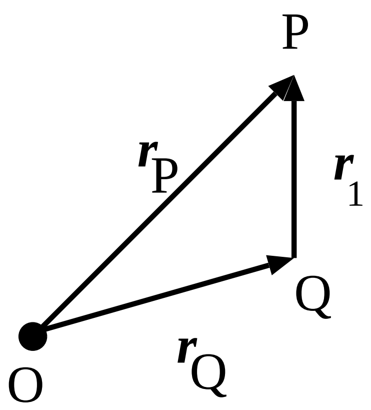
11. 座標変換と慣性力

11.1 相対位置ベクトル (復習)

物体 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ 物体 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とする.

物体 Q に対する 物体 P の 相対位置ベクトル とは, Q から P に向かう矢印で表わされるベクトル $\boldsymbol{r}_1$ である. いわば,

106 .



このとき,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}.\text{つまり } \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}. \tag{151}$$

11.2 座標系の変更 (平行移動)

新しい座標系 $x'y'z'$ **を考えよう．座標系** $x'y'z'$ **の原点** O' **は，物体** Q **の位置．** x', y', z' **軸は，** x, y, z **軸を** 107 **したもの．**

ちょっと変数名変更

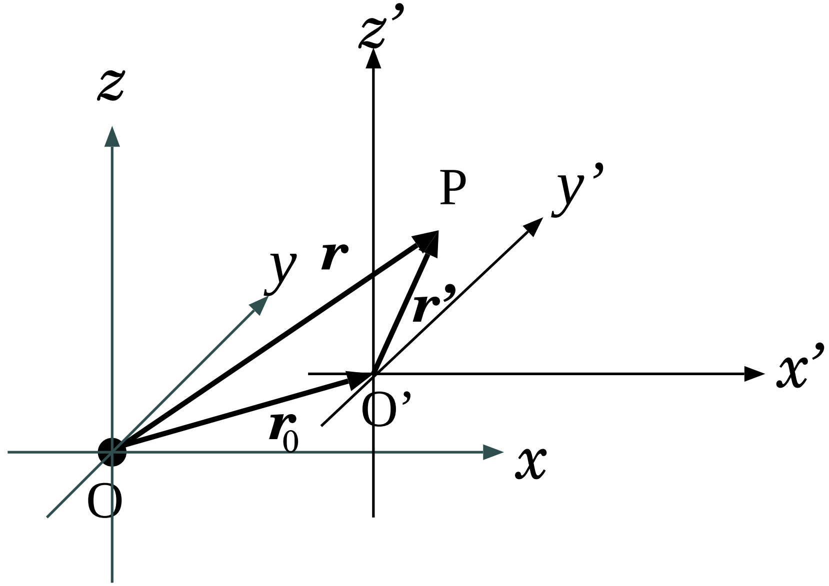
$\boldsymbol{r}_\mathrm{P} \longrightarrow \boldsymbol{r}$: **座標系** xyz **でみた** P.

$\boldsymbol{r}_\mathrm{Q} \longrightarrow \boldsymbol{r}_0$: **座標系** xyz **でみた** $\mathrm{Q}{=}\mathrm{O}'$.

$\boldsymbol{r}_1 \longrightarrow \boldsymbol{r}'$: P **の** Q **に対する相対位置ベクトル＝座標系** $x'y'z'$ **でみた** P.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0. \qquad (152)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \qquad (153)$$



注意 r',O$'$ の $'$ は微分ではなく, 新旧座標系を区別するためのものプライムまたはダッシュと発音.

座標変換

このように, 元の座標系での位置ベクトルから, 別の座標系での位置ベクトルを求めることを **座標変換** という. 上で見たのは, 平行移動による座標変換.

どの座標系で考えても (どのように座標変換しても), 運動の実体は同じはず. 問題に対しては同じ答が出せる.

でも, 見易い (計算しやすい) 座標系というのはあるので, 便利な座標系に座標変換するとよい.

放物運動のときに, 発射点を原点にしたり, 運動が xz 平面で起こる ($y(t) = 0$) としたのも, 座標変換の例.

座標系 $x'y'z'$ で測った速度, 加速度は?

P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が時間とともに変化するとする. O$'$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ は変化しないとする.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 \tag{154}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) - \boldsymbol{0}. \tag{155}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) - \boldsymbol{0}. \tag{156}$$

元の座標系 xyz と, 新しい座標系 $x'y'z'$ では, 位置ベクトルは [108] . 速度ベクトル, 加速度ベクトルは [109] .

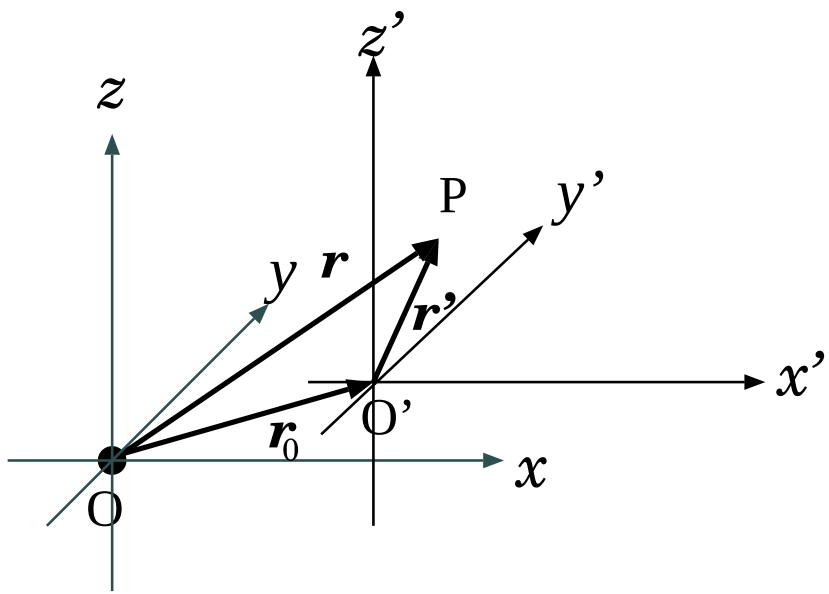
11.3 運動座標系と慣性力

新しい 座標系 $x'y'z'$ の原点 O$'$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0(t)$ も時間に依存するとしよう.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t). \tag{157}$$

こういう, 時間とともに変化する座標系を 110 という.

走ってる車に '固定された' 座標系 $x'y'z'$ で, 鳥や, 他の車や, お手玉や, 揺れるコップの運動を見るようなもの.



- $\boldsymbol{r}'(t)$: 自分の車からみた相手の車
- $\boldsymbol{r}(t)$: 地面からみた相手の車
- $\boldsymbol{r}_0(t)$: 地面からみた自分の車

座標系 xyz は地面に固定された座標系.

質量 m **の物体** P **は,** **座標系** xyz **からみて,** **力** $\boldsymbol{F}(t)$ **を受けて運動しているとする. このとき,** **運動方程式**

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{158}$$

が成立.

$\boxed{\textbf{座標系 } x'y'z' \textbf{ からみた運動方程式, つまり } \boldsymbol{r}'(t) \textbf{ の満たす運動方程式は?}}$

$\boldsymbol{r}(t)$ **に対する運動方程式から導けばよい.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t)\right) = \boldsymbol{F}(t) + \boxed{-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t)} \tag{159}$$

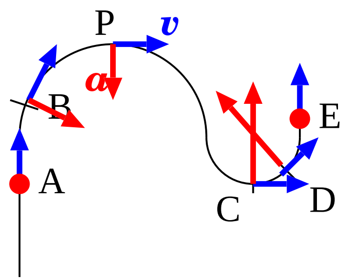
ニュートンの運動方程式に, **座標系の原点** O′ **の加速度の** 111 **というよけいな項** **がついてしまう!**

座標系によってはニュートンの運動方程式は成立しない?

姑息な解決策

座標系 $x'y'z'$ でも運動方程式が成り立つと思いたいので, 座標系 $x'y'z'$ に限っては,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \underbrace{\boldsymbol{F}(t)}_{\text{普通の力}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)}_{\text{慣性力}} \tag{160}$$



$$\text{慣性力 } \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\boldsymbol{a}_0(t) \tag{161}$$

のように, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)$ という別の力が追加で働いていると考えることにする.

ここで, m は 112 **の質量, $\boldsymbol{a}_0(t)$ は** 113 **の加速度. これを** 114 **という. $\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{a}$ じゃない!**

加速度運動する運動座標系からみた運動方程式には慣性力が現れる.

慣性力なしの運動方程式が成立する座標系 = 慣性系

地面に固定された座標系は慣性系 (本当?).

11.4 いろんな場合の慣性力

O′ の位置が一定の場合

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \boldsymbol{C}. \quad (\text{定数}) \tag{162}$$

最初の場合と同じ. $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}$ **より慣性力は働かない.**

例 **原点は (時間によらないなら) どこにとってもよい. 世界に中心はない.**

O′ が等速直線運動する場合

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \boldsymbol{B}t + \boldsymbol{C}. \quad (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\ \text{定数}) \tag{163}$$

このときの座標変換

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{B}t - \boldsymbol{C} \tag{164}$$

を ガリレイ変換 という.

このとき, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}$ **より慣性力は働かない.**

例 列車が静かに一定速度で走っていると, 止まっているのと区別がつかない. そういう列車のなかでボールを投げても, 地上で投げるのと同じ運動をする.

ガリレイの相対性原理

互いに等速直線運動する座標系では,

115 **(物理法則は同じ形になる).**

特に, 慣性系に対して等速直線運動する座標系は, また慣性系.

だから, 一定速度で走る列車の上では, 列車に固定された座標系で考えてもよい.

O′ が等加速度運動する場合

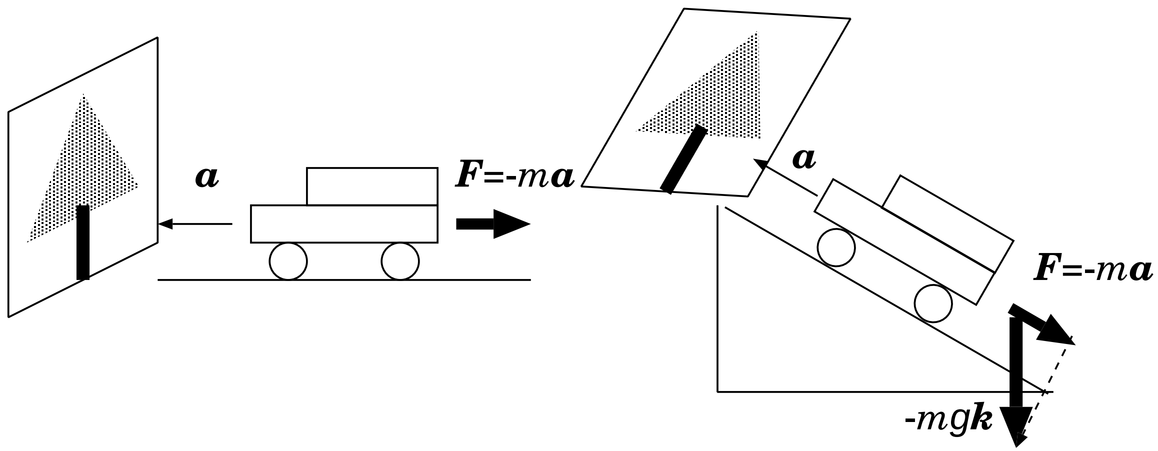
$$\boldsymbol{r}_0(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}t^2+\boldsymbol{B}t+\boldsymbol{C}.\quad(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\ \text{定数}) \tag{165}$$

このとき, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)=-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t)=-m\boldsymbol{A}.$

一定の慣性力 $-m\boldsymbol{A}$ **がはたらく.**

例 **前後に加速, 減速する車の中で感じる力. エレベータが動き出すとき, 止まるときに感じる力.**

バック・トゥ・ザ・フューチャー・ザ・ライド



応用: 落下中の物体に固定された座標系

バンジージャンプ中に手から離れたカメラがどうなるか考えよう.

地面に固定された座標系 xyz (z 軸の正の向きが鉛直上向き) でみた, バンジージャンプで落下中の質量 M の人の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0(t)$ とする.

落下中の人に固定された座標系を $x'y'z'$ とする.

落下中の人が持ってる質量 m のカメラの, 座標系 xyz, 座標系 $x'y'z'$ での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t)$ とする.

人の運動方程式

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = -Mg\boldsymbol{k}. \tag{166}$$

つまり, 加速度は $-g\boldsymbol{k}$.

座標系 $x'y'z'$ でのカメラの位置ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ の従う運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \underbrace{-mg\boldsymbol{k}}_{\text{重力}} + \underbrace{(-m)(-g\boldsymbol{k})}_{\text{慣性力}} \overset{\boxed{!}}{=} \mathbf{0}. \tag{167}$$

つまり, 落下中の人から見ると, 重力と慣性力と

が 116 , カメラは力を受けずに (無重力状態で) 運動している!

実はスペースシャトルの中の無重力状態もこういうこと.

ジェット機で体験する無重力状態ロシアで 88 万円

例題 24

重力加速度の大きさを $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$ とする.

体重計とは, その上に載った物の受ける力が, 鉛直上向きに測って F $[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]$ であるときに, $-F/g$ [kg] と表示するような機械である.

質量 $M = 1000$ [kg] のエレベータ内で, 質量 $m = 50$ [kg] の人が体重計にのっていた.

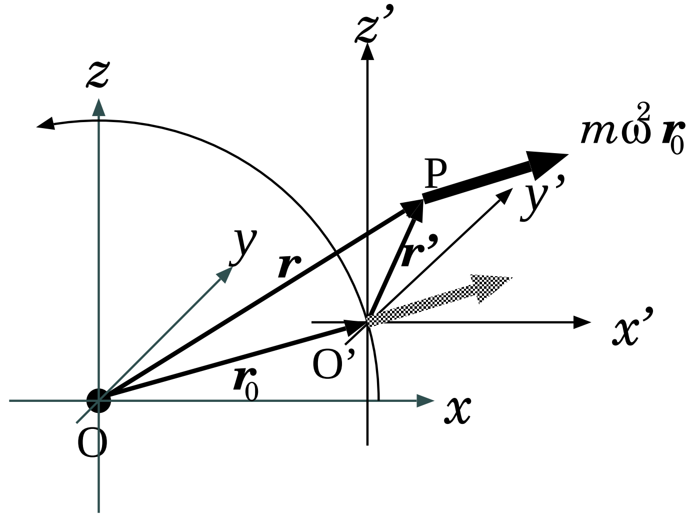
エレベータが加速度 $\pm 4.9[\mathrm{kg \cdot m/s^2}]$ で上昇中, 下降中のとき, および, ロープが切れて落下中のとき, 体重計はどのような値を指すか考えよう.

117

11.5 等速円運動と遠心力

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (168)$$

このとき,



$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) &= -\,m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) \\ &= -\,m(-\omega^2)\boldsymbol{r}_0(t) = m\omega^2\boldsymbol{r}_0(t) \end{aligned} \qquad (169)$$

(前回求めた加速度)

回転の中心と O′ を結ぶ方向に平行で, 中心と逆向き＝$\boxed{\text{遠心力}}$

$\boxed{\text{例}}$ レコードのターンテーブルにのってる人形. メリーゴーラウンドにのってる子供.

$x'y'z'$ 座標系が回転もすると, コリオリ力が現れる.

北半球で台風が左巻きなのはコリオリの力のせい．1999 年 18 号．アニメ

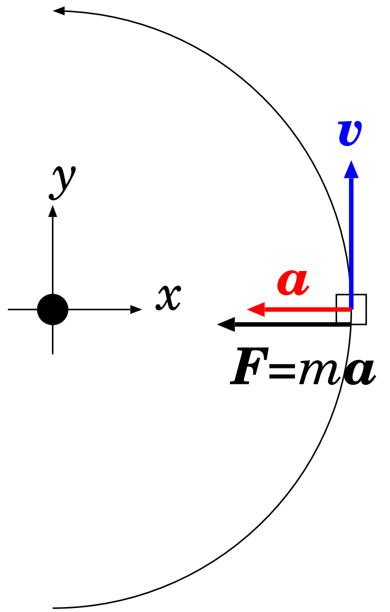
運動方程式を 2 つの立場で立てる

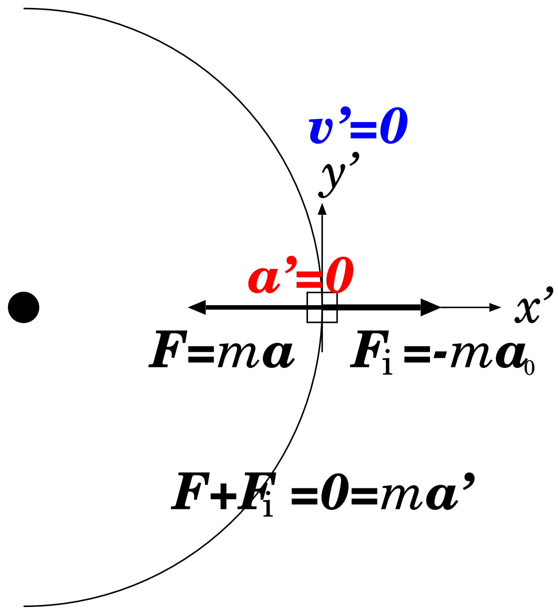
xyz 系 (慣性系)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{170}$$

$x'y'z'$ 系 (非慣性系)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{F}(t) + \boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) \tag{171}$$





例題 25

鉛筆に 20 [g] **のビー玉を長さ** 9[cm] **の糸で結び**, 3 **秒に** 1 **回の割合で振り回して等速円運動させた. 糸がビー玉を引く力の大きさは**?

118

quiz 16

EP **レコード** (**アナログシングルレコード**) **は**, **直径** 18 [cm] (**正確には** 7[inch]) **で**, 45rpm(revolutions per minute) **と言われるように**, **毎分** 45 **回転する**. EP **レコードの端に**, **質量** 81 [g] **の皇帝ペンギンのぬいぐるみを置いたまま回した. このぬいぐるみは**, **静止しているときに** 0.1N **以上の力を受けると倒れてしまうという. ぬいぐるみは遠心力で倒れるか考えよう. ただし** $\pi^2 = 9.9$.

119

quiz 17

x 軸の正の向きに前進する (バック中ではない) 車の運動を考える. 時刻 t における車の (慣性系からみた) 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0(t)$ としたとき, 速度ベクトルが $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 3-\cos(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だとする.

加減速の際に, ドライバーがシートに押し付けられたり, シートから浮き上がったりするのは慣性力によるものである. 車の質量を m_1, ドライバーの質量を m_2 とするとき, ドライバーがシートに最も強く押し付けられる時刻とそのときの慣性力を求めよう.

120

ファイナルトライアル

07/28(月) 1 講時 90 分, 科目の成績 100 点中 50 点分です. 試験範囲は, 授業の範囲でいうとすべてです. 具体的には次の 5(大) 問を出題します.

- 内積, 外積, スカラー 3 重積, 右 (左) 手系などベクトルの計算
- 位置, 速度, 加速度, 力, 初期条件のどれかからどれかを求める.
- 運動が分かったときに, 物体が壁を越すか, ゴールするか, 距離, 速度, 加速度がこうなるのはいつかなど.
- 単振動, 等速円運動
- 慣性力, 遠心力

答案は返却しません. 点数は, アドレス `t050`*nnna*`@ryukoku-u.jp` へのメールで, すべての人に個別に連絡します.

quiz 略解 16

半径 $R = 9.0$ [cm], 角速度 $\omega = 2\pi \cdot 45$[rad/分]. 遠心力の大きさは, $mR\omega^2 = 81 \times 10^{-3}[\mathrm{kg}] \times 0.09[\mathrm{m}] \times (\frac{2\pi \cdot 45}{60})^2[(\mathrm{rad/s})^2] = 0.16[\mathrm{N}]$. よって転ぶ.

quiz 略解 17

慣性力は

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 2m_2\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

慣性力が x 軸の負の向きで, 大きさが最も大きい時刻を求めればよい. つまり, $f(t) = 2m_2\sin(2t)$ が, 0 未満で, かつ最小となる時刻を求めればよい. それは $2t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ すなわち $t = \frac{3}{4}\pi + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. そのときの慣性力は $-2m_2$.