物理数学☆演習 I 夏のプチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2005 年 06 月 23 日更新: Time-stamp: "2005/07/06 Wed 20:13 hig"

プチテスト参加案内

両面です．全部で 4 問です． 以下の問題で, x, y, z 座標系は右手系 (ふだん通り) です. x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトルの記号として, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をつかってよいです.

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
   (a) 1-502 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない.

1

物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とする. 速度ベクトルが

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \sin \pi t \\ -2 \\ \cos \pi t \end{pmatrix}$$

で与えられる. また, 物体の時刻 $t = 0$ における位置ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ である.

1. 時刻 t における位置ベクトルを求めよう.
2. 速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ と , ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とのなす角を θ とする. $\cos\theta$ を求めよう.
3. 速度ベクトルが, ベクトル $\boldsymbol{w}$ にいちばん近い向きになる時刻を求めよう.

2

物体 P,Q,R は, それぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2+8 \\ t^2-4 \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

にしたがって運動する.

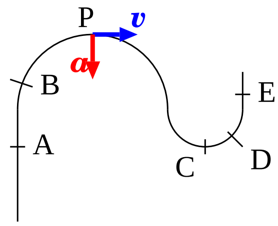
1. 物体 P と 物体 R の距離は時間とともに変化する. 距離が極大になる時刻を求めよう.
2. 物体 P が点 R にもっとも近づく時刻を求めよう.
3. 物体 Q から見て, 物体 P がもっともゆっくり動いている時刻を求めよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

下に描かれた経路の上を等速運動 (速さ一定の運動) する物体がある．例として, 点 P での, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ が描かれている．

点 A,B,C,D,E における速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を, 点 P の例のように描こう．



注意

- この問では理由の記述は不要です．
- ベクトルの大きさは, 点 P の例と正しい比になってるように描いてね．
- 零ベクトルになっている点では, 矢印のかわりに • をうってね．
- 角度のわかるところは角度を記してね．
- 接しているところは接しているっぽく描いてね．
- 速度ベクトルと加速度ベクトルを区別して描いてね．

4

物体の時刻 t における位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．

1. 時刻 t における速度ベクトルを求めよう．
2. 時刻 t における加速度ベクトルを求めよう．
3. 時間帯 $-\infty < t \leq 0$ における, この物体の xy 平面上の軌跡を描こう．
4. 軌跡の上に適当に 3 点を選んで, その点における物体の速度ベクトル, 加速度ベクトルを描こう (描き方は問題 3 を参照)．

答案返却の案内

採点には 1 週間以上かかる見込です．答案の返却とは無関係に, 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t050`*nnnx*`@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします．ここに届いたメールは, Web ページ

`http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/`

で見られます．

物理数学☆演習 I 夏のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2005 年 06 月 23 日樋口さぶろお[2]

全般的な講評

ベクトルは太字で書きましょう.
最終的結果が正しくても, 過程を書かないと点数はありません.

1

1. $\boldsymbol{r}(t) = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi}\cos\pi t + C_1 \\ -2t + C_2 \\ +\frac{1}{\pi}\sin\pi t + C_3 \end{pmatrix}$. ここで, 積分定数を初期条件 $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ から定めて, $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi}\cos\pi t + \frac{1}{\pi} \\ -2t + \pi \\ +\frac{1}{\pi}\sin\pi t \end{pmatrix}$.
2. $\cos\theta = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{w}}{|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)||\boldsymbol{w}|} = \frac{2-\cos\pi t}{\sqrt{10}}$.
3. もっとも近づくのは θ が最小のとき, つまり $\cos\theta$ が最大のとき, つまり $\cos\pi t$ が最小のとき. よって, $t = 2n+1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

講評

1. では, 合成関数の微積分を復習しましょう. $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ なら, $\int f(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax)+C$ ですよね.

3. では, 日本語の意味をゆっくり考えましょう. 日食の時には, 月と太陽は自分から見て同じ向きにいますが, 距離は 1 億 5 千万 km くらい離れています.

2

1. 物体 P と物体 R の距離を $f(t)$ とすると,

$$g(t) = f(t)^2 = |\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{R}}(t)|^2 = (2t^2+8-4)^2 + (t^2-4)^2 + (2t^2-8)^2 = 9t^4 - 24t^2 + 96.$$

$g(t)$ が極大になるとき, 距離 $f(t)$ は極大になる.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = 36t\left(t - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(t + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$$

よって増減表は

t		$-\sqrt{\frac{4}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{4}{3}}$	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	80	$\nearrow$	96	$\searrow$	80	$\nearrow$

よって, $t = 0$ で極大となる.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. 上の増減表から $t=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ でもっとも近づく.
3. 相対速度の大きさが最小になる時刻を求める. 相対速度の大きさを $h(t)=|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t)-\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)|$ とおくと,

$$h(t)^2=36t^2-16t+4.$$

これは, $t=\frac{2}{9}$ で最小になる.

講評

1. のように, 微積分で出てくる, 最大, 最小, 極大, 極小, 増加, 減少などの言葉は, 当然, 物理数学☆演習 I に出てくる量に対しても使えます.

3. では, 相対速度の大きさを考えるところがキーです.

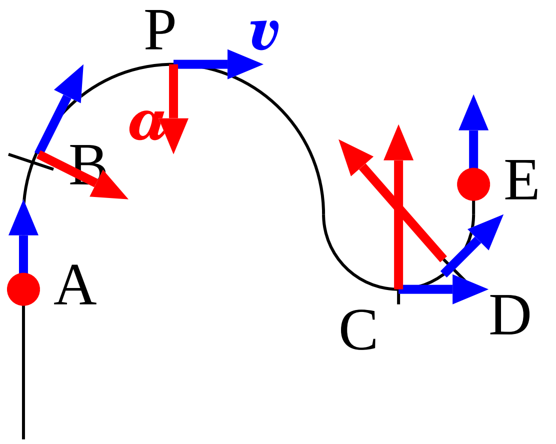
3

速度ベクトルは軌跡に接する．速度ベクトルの大きさは，等速運動なので一定．

加速度ベクトルは，等速運動なので速度ベクトルに直交しカーブ内向き．小さい円の半径は大きい円の半径の 1/2 倍なので，加速度ベクトルの大きさは 2 倍になる．

直線部分では加速度ベクトルは $\mathbf{0}$．

これらに注意すると，図のようになる．



講評

これは L08 そのままですね．円の半径と加速度の大きさは反比例することに注意しましょう．小さく曲ろうとするほど加速度は大きいです．

4

1. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2t} \\ 6\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$．
2. $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-2t} \\ 12\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{r}(t)$．
3. t を消去すると，$y = \frac{3}{x}, z = 0$ となることなどに注意する．
4. どんな場合でも速度ベクトルは軌跡に接すること，この問題の場合には $\boldsymbol{r}(t)$ と $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ が同じ向きであることに注意する．

講評

3. は，t を消去して $y = 3/x$ を得ますが，t 消去で軌跡を得るときは範囲に注意するんでしたね．

4. は，せっかく 1., 2. で速度，加速度を求めているのでそれを利用しましょう．速度ベクトルと加速度ベクトルが直交するかのように描いている人が多かったですが，この問題の運動は等速運動ではないので，直交はしないのです．2. の解答から，$\boldsymbol{r}(t)$ と $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ が同じ向きであることに気づけるといいですね．