樋口さぶろお[a] 更新 Time-stamp: "2005/06/03 Fri 11:40 hig"

quiz 略解 5

1. $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$
2. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=1\cdot 1+(-2)\cdot 2+0\cdot 3=-3.$
3. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\+4\end{pmatrix}$
4. $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times 2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}-(-1)(2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=$
   $2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-12\\-6\\+8\end{pmatrix}$
5. 図より, 表向きであるとは, $\langle p, A, B\rangle$ が左手系であることとと同じ. ここで,

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-14<0 \tag{48}$$

[a]Copyright ©2003-2005 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

よって, **表向き**.

quiz 略解 6

2 **つのベクトルのなす角が** $\theta < \pi/6$ **なら内部にある**. $\theta \geqq 0$ **のとき**, $\theta < \pi/6$ **と** $\cos\theta > \sqrt{3}/2$ **は同値**.

1. $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ **とすると**, $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{p}|} = \frac{25}{27} > \sqrt{3}/2$. **内部**.
2. $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ **とすると**, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} < 0$ **より**, $\theta > \pi/2$. **外部**.

5. 運動のベクトルによる表現

香中 1 章と 2 章の間

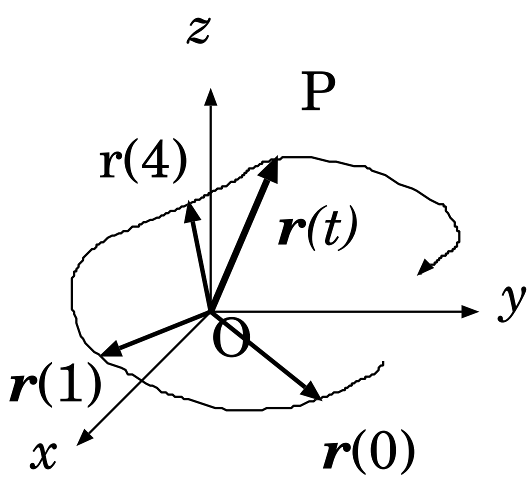
5.1 位置ベクトル

3 次元空間に物体 P があって運動している．例:飛行機，ボール，蚊，...

座標系 xyz と原点 O は固定する．運動の例 ⇒ アニメ

ある瞬間の物体 P の位置は，36 を O，37 を P とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で指定される．これを P の 位置ベクトル という．

空間を物体 P が時間 t とともに，移動していくとき P の位置ベクトルは時間の関数なので，$\boldsymbol{r}(t)$ のように書く．たとえば



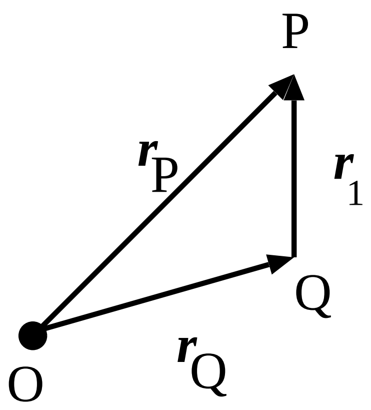
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ \sin t \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

5.2 相対位置ベクトル

物体 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ 物体 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とする.

物体 Q に対する 物体 P の 相対位置ベクトル とは, Q から P に向かう矢印で表わされるベクトル $\boldsymbol{r}_1$ である. いわば,

38 .



このとき,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}.\text{つまり } \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}. \tag{50}$$

5.3 距離

$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{P}}(t) \\ y_{\mathrm{P}}(t) \\ z_{\mathrm{P}}(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Q}}(t) \\ y_{\mathrm{Q}}(t) \\ z_{\mathrm{Q}}(t) \end{pmatrix}$ とする．時刻 t の P と Q の間の 距離 は

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}_1(t)| &= |\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t)| \\ &= \left[(x_{\mathrm{P}}(t) - x_{\mathrm{Q}}(t))^2 + (y_{\mathrm{P}}(t) - y_{\mathrm{Q}}(t))^2 + (z_{\mathrm{P}}(t) - z_{\mathrm{Q}}(t))^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{51}$$

時刻 t に P と Q が 衝突 する (52)

$$\Longleftrightarrow \text{時刻 } t \text{ に} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \tag{53}$$

$$\Longleftrightarrow x_{\mathrm{P}}(t) = x_{\mathrm{Q}}(t), y_{\mathrm{P}}(t) = y_{\mathrm{Q}}(t), z_{\mathrm{P}}(t) = z_{\mathrm{Q}}(t) \tag{54}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\;39\;\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{55}$$

例題 11

時間帯 $0 < t < \frac{3}{4}\pi$ **で, 位置ベクトルが**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

にしたがって運動する物体がある.

1. **点** $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ **に最も近づく時刻** t **を求めよう.**
2. **点** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **を, 物体が通過するならその時刻** t **を求めよう.**

40

5.4 運動の軌跡

xyz 空間内で，物体が通過した点をつないでできる曲線を **軌跡** という．

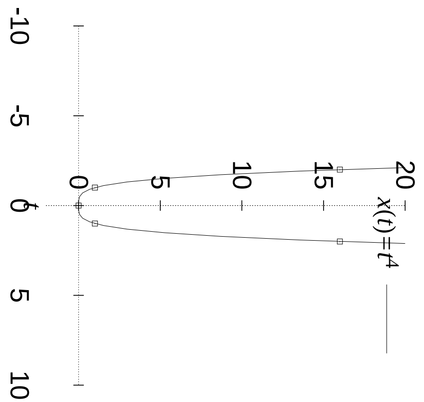
例題 12

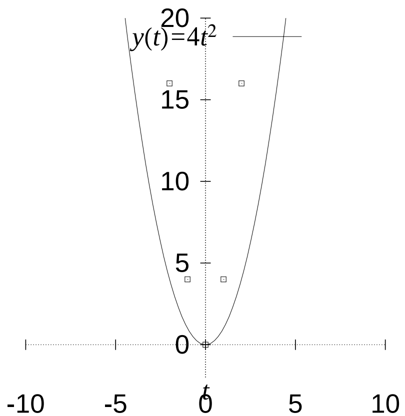
空間を運動している物体 P の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．軌跡を描こう．アニメ

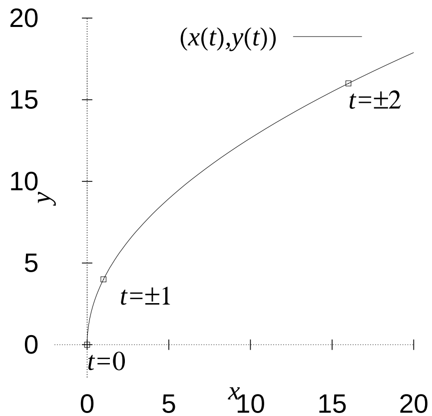
41

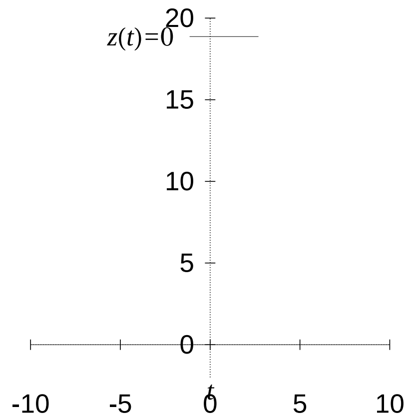
5.5 t-x, t-y, t-z グラフ

時間 対, x, y, z 座標のグラフを描くとわかりやすいこともある.









5.6 パラメータ表示と軌跡

一般に, t のような '余計な' 変数を使って $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ あるいは $x(t) = t^4, y(t) = 4t^2, z(t) = 0$ のように軌跡を表現する方法を $\boxed{\text{パラメータ表示}}$ という.

パラメータ表示から, 軌跡の方程式を導くことができる.

42

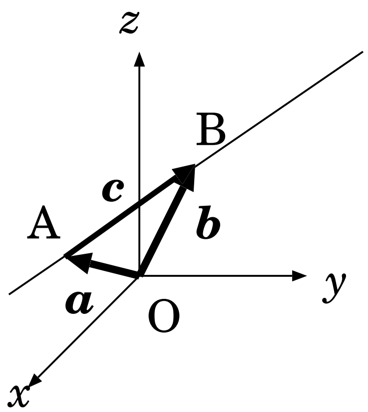
- 時刻 t を $\boxed{\text{パラメータ (助変数)}}$ とする $\boxed{\text{パラメータ表示}}$ では運動の様子がすべてわかるが, 物体の通過した道は見にくい.
- $\boxed{\text{軌跡の方程式}}$ では, 物体の通過した道がどのような形になっていたかわかるが, 通過した速さなどはわからない.

軌跡の方程式を求めるときには, 範囲がどうなっているか注意.

5.7 直線のパラメータ表示と方程式

2 点 A,B **を通る直線のパラメータ表示**. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ **とすると**,

$$\boldsymbol{r}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}t. \tag{57}$$



xy 平面内にあるとき

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **とする**.

$$x = a_1 + c_1 t \tag{58}$$

$$y = a_2 + c_2 t \tag{59}$$

$$z = 0. \tag{60}$$

t を消去すると,

$$\frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2}(=t), \qquad z=0. \tag{61}$$

整理すると

$$\text{平面の直線の方程式} \quad y = \frac{c_2}{c_1}(x-a_1)+a_2, \qquad z=0. \tag{62}$$

xyz 空間内の直線

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする.

$$x = a_1 + c_1 t \tag{63}$$

$$y = a_2 + c_2 t \tag{64}$$

$$z = a_3 + c_3 t \tag{65}$$

t を消去すると,

$$\text{空間の直線の方程式} \quad \frac{x-a_1}{c_1} = \frac{y-a_2}{c_2} = \frac{z-a_3}{c_3}(=t). \tag{66}$$

例題 13

時間帯 $0 < t < \pi$ **で, 位置ベクトルが**

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

にしたがって運動する物体がある.

1. **時刻** $t = \frac{\pi}{4}$ **における位置ベクトル** $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4})$ **を求めよう.**
2. y **軸を通過する時刻を求めよう.**
3. **直線** $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$ **を通過するならその時刻を求めよう.**
4. **平面** $y + z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **を通過するならその時刻を求めよう.**
5. **軌跡を描こう.**
6. **点** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ **を, 物体が通過するならその時刻** t **を求めよう.**

アニメ

43

quiz 7

物体 P, Q の, 時刻 t における位置ベクトルは,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

で与えられる.

1. 時刻 $t = -2$ における P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(-2)$ を求めよう.
2. 物体 P が yz 平面 $(x = 0)$ 上にある時刻を求めよう.
3. 物体 P が 直線 $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = 0$ 上にくる時刻があれば求めよう.
4. 物体 P が 平面 $x + 2y + z = 2$ 上に来る時刻があれば求めよう.
5. 物体 P,Q の xy 平面 $(z = 0)$ 上の軌跡を描こう.
6. 物体 P と Q がもっとも接近する時刻 t と, その時の距離を求めよう.

プチテストは月曜日に返却します

12 時 30 分以降です．点数はメールで連絡します．別のアドレスで受け取りたい人は，あらかじめアドレス変更してね．

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

http://hig3.net