物理数学☆演習 II 秋のプチテスト

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-11-01 Thu **更新**: 2007-12-20 08:22JST

秋のプチテスト参加案内

1. **全部で 4 問, 50 分です.**
2. **解答用紙の指定された面に指定された問を解答しよう.**
3. **過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.**
4. **問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.**

1

次の微分方程式を変数分離法で解こう. 与えられた初期条件から積分定数を定めよう.

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -3x(t), \quad x(0) = -4.$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{(x(t)-3)(x(t)-2)}, \quad x(0) = 4.$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 1 = 2x(t), \quad x(0) = -\frac{1}{2}.$
4. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{e}^{-2x(t)} \times \cos t, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$

2

ある高層ビルの屋上を原点として鉛直下向きに z 軸の正の向きをとる. 質量 m の物体が, 速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数 $c > 0$) と重力 (重力加速度の大きさ g) だけを受けて運動する. 時刻 $t = 2$ に, 速さ $v_0 = 5$ で, この高層ビルの屋上から鉛直上向きに投げ上げた.

1. **運動方程式を書こう (すべての絶対値記号を外そう. 書くだけで解かなくてよい)**
2. **初期条件を書こう.**
3. **高層ビルが十分に高いと考えて, 終端速度 v_∞ を求めよう (安易な方法でもどんな方法でもよい)**

裏もあります

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

鉛直上向きに z **軸の正の向きをとる**. **質量** m **の物体が**, **速さの** 6 **乗に比例する空気抵抗の力** (**比例定数** $c > 0$) **と重力** (**重力加速度の大きさ** g) **だけを受けて運動する**.

1. **運動方程式を書こう** (**絶対値記号が残っていてもよい**).
2. **終端速度** v_∞ **を求めよう** (**安易な方法でもよい**)

4

質量 $m = \frac{1}{3}$ **の物体が**, x **軸上を力** $F(t) = -5 \times \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ **だけを受けて運動している**. **またこの物体の運動は**, $x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = +2$ **を満たす**. **物体の運動** $x(t)$ **を求めよう**.

$$\boxed{\textbf{おしまい}}$$

物理数学☆演習II秋のプチテスト略解

樋口さぶろお[2]　**配布**: 2007-11-01 Thu **更新**: 2007-12-20 08:22JST

1

1. $x(t) = -4\mathrm{e}^{-3t}$.
2.
$$\int (x-3)(x-2)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t$$
$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x = t + C.$$

   初期条件 $x(0) = 4$ **より**, $C = \frac{64}{3} - 40 + 24$. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x = t + \frac{16}{3}$. **この場合は** $x(t) = \cdots$ **と簡単には書けないのでこれで終わりになる**.
   だいたい想像つくと思いますが, **本当は部分分数展開でできる** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = (x(t)-3)(x(t)-2)$, $x(0) = 4$ **を出題したかったんですね**.
3. $\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int\,\mathrm{d}t$ **より**, $x(t) = -\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}$.
4. $\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \cos t\,\mathrm{d}t$ **より**, $\mathrm{e}^{2x} = 2\sin t + \mathrm{e}$. **よって**, $x(t) = \frac{1}{2}\log(2\sin t + \mathrm{e})$.

講評とコメント　よく見られた間違いです.

- $\mathrm{e}^A = B + C \quad \Leftrightarrow \quad A = \log(B+C)$ **だが**, $A = \log B + \log C$ **としてしまう**.
- $\mathrm{e}^A = B + C \quad \Leftrightarrow \quad A = \log(B+C)$ **だが**, $A = \log|B+C|$ **としてしまう**. **解なしのはずの** $\mathrm{e}^x = -1-1$ **が** $x = \log|-1-1|$ **となっちゃうでしょ**.
- $\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ **だが**, $\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \log|\mathrm{e}^{-2x}| = -2x$ **としてしまうもの**. $t = \mathrm{e}^{-2x}$ **とおいたなら置換積分しなきゃだめでしょ**. **それか**, **微分して検算してみようよ**.
  (2) **は授業でほとんど出てこないパターンだったので難しかったですね**.

2

1.
$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg - c\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t).$$
2.
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(2) = -5, \quad z(2) = 0.$$
3. $t \to 0$ **で** $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) \to 0$ **とすると**, $0 = mg - cv_\infty$. **よって** $v_\infty = +\frac{mg}{c}$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

講評とコメント　問題文に出てこない v などの変数を使っていた人もいました．減点しました．問題文にない変数は自分で作って使っていいけど，定義を書いてからにしよう．速度を $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とする，とかいって．

3

1.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + c\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|^6 \frac{-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|}$$

2. $t \to 0$ で $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) \to 0$ とすると，$0 = mg - cv_\infty^6$ すなわち $(v_\infty)^6 = \frac{mg}{c}$. 解くと，$v_\infty = \pm(\frac{mg}{c})^{-1/6}$. 座標軸の向きから $v_\infty < 0$ なので，$v_\infty = -\left(\frac{mg}{c}\right)^{1/6}$.

講評とコメント　$(v_\infty)^6 = -\frac{mg}{c}$ から $v_\infty = -(\frac{mg}{c})^{1/6}$ としている人もいましたが，前者の式の時点ですでにあやまりです．左辺は正，右辺は負だから．マイナス $-$ はつごうよくカッコの内外に出し入れできるわけではありません．$-\cos(x) = \cos(-x)$ じゃないでしょ．

4

運動方程式は

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -5\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2.$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -15(v(t))^2$$

変数分離型として解くと，

$$\int -\frac{1}{v^2}\mathrm{d}y = 15\int \mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{v} = 15t + C \quad C \text{ は積分定数}$$
$$v(t) = \frac{1}{15t + C}.$$

ここで，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{15t + C_1}$$

を変数分離型として解くと,

$$x(t) = \frac{1}{15}\log|15t + C_1| + C_2.$$

初期条件より C_1, C_2 を定めると

$$x(t) = \frac{1}{15}\log(1 + 30t).$$

講評とコメント $\int \frac{1}{at+b}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\log at + b + C$ としている人もいましたが, $\int \frac{1}{at+b}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\log|at + b| + C$ が正しい. この問の場合には問題文から $at + b \geq 0$ であることがわかるので原点はしませんでした.