

## 物理数学 演習 II

樋口さぶろお<sup>1</sup> 配布: 2007-10-04 Thu 更新: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:35 JST hig"

## 2 変数分離型微分方程式と空気抵抗の力

### 今日の目標

1. 変数分離型微分方程式ががんがん解けるようになる
2. それを使って, 空気抵抗の力だけを含む運動方程式を解けるようになる
3. 重力やいろんな空気抵抗の力を含む運動方程式をたてられるようになる

### 2.1 変数分離型微分方程式

#### 2.1.1

変数分離型微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = -3x(t) \tag{2.1}$$

を初期条件  $x(0) = 2$  のもとで解こう.

#### 2.1.2 変数分離型微分方程式その 1

次の変数分離型微分方程式を与えられた初期条件のもとで解こう.

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t), \quad x(0) = 2. \tag{2.2}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 2. \tag{2.3}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \tag{2.4}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = -t^2, \quad x(0) = 2. \tag{2.5}$$

<sup>1</sup>Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

## 2.1.3 変数分離型微分方程式その2

次の変数分離型微分方程式を与えられた初期条件のもとで解こう.

$$\frac{dx}{dt}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \quad (2.6)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = e^{-x(t)}, \quad x(0) = 2. \quad (2.7)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \quad (2.8)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) + 2x(t) = 1, \quad x(0) = 2. \quad (2.9)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad x(0) = 2. \quad (2.10)$$

## 2.1.4 変数分離型微分方程式その3

次の変数分離型微分方程式を与えられた初期条件のもとで解こう. 積分定数だけ決め直せばよい.

$$\frac{dx}{dt}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = -3. \quad (2.11)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = e^{-x(t)}, \quad x(0) = -3. \quad (2.12)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = -3. \quad (2.13)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) + 2x(t) = 1, \quad x(0) = -3. \quad (2.14)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad x(0) = -3. \quad (2.15)$$

## 2.2 空気抵抗の力だけを含む運動方程式を解く

(速さに比例する) 空気抵抗の力は、座標軸の向きによらず、 $c > 0$  に対して、

永田 p.61 (4.13)

$$F_x = -c \times \frac{dx}{dt}(t). \quad (2.16)$$

## 2.2.1

質量  $m = 2$  の物体が,  $x$  軸上を, 速度に比例する空気抵抗の力だけを受けて運動している (比例定数  $c = 4$ ). 時刻  $t = 0$  に位置  $x = 1$  を速度  $-10$  で通過した物体の運動を求めよう.

## 2.2.2

質量  $m = 3$  の物体が,  $x$  軸上を, 速度に比例する空気抵抗の力だけを受けている (比例定数  $c = 9$ ). 物体は時刻  $t = 0$  に位置  $x = 1$  を速度  $-9$  で通過した.

1. 運動方程式と初期条件を書こう.
2. 運動方程式を解いて速度  $\frac{dx}{dt}(t)$  を求め, グラフを描こう.
3. 速度  $\frac{dx}{dt}(t)$  を積分して物体の運動を求め, グラフを描こう.
4. 物体が  $x = 0$  を通過する時刻を求めよう.
5. 十分時間がたったときに物体の近づく点の座標を求めよう.

## 2.3 重力と空気抵抗の力を含む運動方程式をたてる

重力の項の符号は, 座標軸が上向きか下向きかによって変わるが, 空気抵抗の力の項は (結果的に) 変わらない. [永田 p.62 \(4.15\)](#)

## 2.3.1

鉛直下向きに  $z$  軸の正の向きをとる. 地面を  $z = 0$  とする. 重力と速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数  $c > 0$ ) を受けて, 質量  $m$  の物体が運動する. 時刻  $t = 2$  に, 速さ  $v_0 = 3$  で, 物体を地面から鉛直上向きに打ち上げた.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう.

## 2.3.2

鉛直上向きに  $z$  軸の正の向きをとる. 地面を  $z = 0$  とする. 重力と速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数  $c > 0$ ) を受けて, 質量  $m$  の物体が運動している. 時刻  $t = 3$  に, 高さ  $h = 5$  の点から静かに物体を落とした.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう.

## 2.3.3 運動方程式

鉛直上向きに  $z$  軸の正の向きをとる. 地面を  $z = 0$  とする. 質量  $m$  の物体が, 速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数  $c > 0$ ) と重力 (重力加速度の大きさ  $g$ ) だけを受けて運動する. 時刻  $t = 3$  に, 速さ  $v_0 = 4$  で, 物体を高さ  $h = 10$  の塔の上から, 鉛直下向きに投げ落した.

1. 運動方程式を書こう.
2. 初期条件を書こう.

解説

## 2.4 ちょっと難しい変数分離形

再出題予定

部分分数分解 [川薩四 p.210](#) は積分するときに役立つ.

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

## 2.4.1 部分分数分解

微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 - 4 \quad (2.1)$$

を解こう (積分変数は決めなくていい). *Hint* 部分分数分解. [川薩四 p.81](#)

## 2.4.2 部分分数分解

微分方程式

$$3 \times \frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 + x(t) - 2 \quad (2.2)$$

を解こう (積分変数は決めなくていい). *Hint* 部分分数分解. [川薩四 p.81](#)

## 2.4.3

[川薩四 例題 11.3\(p.210\)](#)[川薩四 問題 1\(p.211\)](#)[川薩四 第 11 章練習問題 1\(3\)2\(1\)\(2\)](#)

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)