

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

## 物理数学 演習 II

樋口さぶろお<sup>1</sup> 配布: 2007-10-11 Thu 更新: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:35 JST hig"

### 3 重力と色々な空気抵抗の力

#### 今日の目標

1. 空気抵抗があるときの落下の様子に直観がきくようになろう.
2. 速さの  $n$  乗に比例する空気抵抗の力を含む運動方程式を書けるようになろう.
3. 終端速度が安易に計算できるようになろう.

#### 3.1 重力と空気抵抗の力

先週の黒板の計算を再現

$z$  軸の正の向きは鉛直上向き. 重力と空気抵抗の力があるとき,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = -mg - c \frac{dz}{dt}(t).$$

$v(t) = \frac{dz}{dt}(t)$  とおいて,

$$\frac{dv}{dt}(t) = -g - \frac{c}{m}v(t).$$

を  $v(t)$  についての変数分離型微分方程式として解く.

$$\int \frac{1}{g + \frac{c}{m}v} dv = - \int dt$$
$$\frac{m}{c} \log \left| g + \frac{c}{m}v \right| = -t + C$$

よって

$$v(t) = -\frac{mg}{c} + C_7 e^{-\frac{c}{m}t}$$

$v(t) = \frac{dz}{dt}(t)$  なので, これをもう一度,  $z(t)$  についての変数分離型微分方程式とみて解く.

$$\int dz = \int \left( -\frac{mg}{c} + C_7 e^{-\frac{c}{m}t} \right) dt$$
$$z(t) = C_5 - \frac{mg}{c}t + C_6 e^{-\frac{c}{m}t}$$

<sup>1</sup>Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

## 3.1.1

上で,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dz}{dt}(t) = ?$

## 3.2 いろいろな空気抵抗の力

速さの  $n$  乗に比例する大きさの空気抵抗の力は, 座標軸によらず  $c > 0$  に対して, 永田 p.60

$$\begin{aligned}
 \text{3次元 } \mathbf{F} &= - \underbrace{\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right|}}_{\text{向き (単位ベクトル)}} \times c \times \underbrace{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right|^n}_{\text{大きさ}} \\
 \text{1次元 } F_x &= - \underbrace{\frac{\frac{dx}{dt}(t)}{\left|\frac{dx}{dt}(t)\right|}}_{\text{向き } (\pm 1)} \times c \times \underbrace{\left|\frac{dx}{dt}(t)\right|^n}_{\text{大きさ}}
 \end{aligned}$$

## 3.2.1 2次の空気抵抗

質量  $m$  の物体が空気抵抗の力だけを受けて  $x$  軸上を運動する (重力は受けない). 空気抵抗の力の大きさは速さの 2 乗に比例する (比例定数を  $c > 0$ )  $x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = -3$  とする. 物体の運動を運動方程式を解いて求めよう.

## 3.2.2 3次の空気抵抗

質量  $m$  の物体が空気抵抗の力だけを受けて  $x$  軸上を運動する (重力は受けない). 空気抵抗の力の大きさは速さの 3 乗に比例する (比例定数を  $c > 0$ ). 物体の運動を運動方程式を解いて求めよう (積分定数は決定しなくてよい).

## 3.2.3 4次の空気抵抗

質量  $m$  の物体が空気抵抗の力だけを受けて  $x$  軸上を運動する (重力は受けない). 空気抵抗の力の大きさは速さの 4 乗に比例する (比例定数を  $c > 0$ ). 物体の運動を運動方程式を解いて求めよう ( $\frac{dx}{dt}(t) > 0$  と仮定してよい. 積分定数は決定しなくてよい).

## 3.2.4

永田 第4章演習問題 [5](p.75)

## 3.2.5

永田 第4章演習問題 [4](p.75) 本文も参照しないとだめかも.

## 3.3 空気抵抗のある放物運動と終端速度

鉛直上向きに  $z$  軸の正の向き, 水平方向に  $x, y$  軸をとる. 重力と, 速さに比例する大きさの空気抵抗の力とがあるとき,

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -c \times \frac{dx}{dt}(t) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = -c \times \frac{dy}{dt}(t) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = -c \times \frac{dz}{dt}(t) - mg \end{cases} \quad \text{永田 (4.15)p.62}$$

空気抵抗がないとき ( $c = 0$ ) のときは放物運動になるのだった 物理数学 演習 I.

$$x(t) \rightarrow 2.2 \text{ の解き方} \rightarrow x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{c}{m}t},$$

$$y(t) \rightarrow 2.2 \text{ の解き方} \rightarrow y(t) = C_3 + C_4 e^{-\frac{c}{m}t},$$

$$z(t) \rightarrow 3.1 \text{ の解き方} \rightarrow z(t) = C_5 + C_6 e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t$$

## 3.3.1 終端速度

上の話で,  $t \rightarrow +\infty$  で,  $\frac{dr}{dt}(t), r(t)$  はどうなる?

## 3.4 終端速度とその安易な求め方

重力と空気抵抗のあるとき,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty$  となる速度  $v_\infty$  を終端速度という.

運動方程式で  $t \rightarrow +\infty, v(t) \rightarrow v_\infty, \frac{dv}{dt}(t) \rightarrow 0$  という条件から安易に求まる.

## 3.4.1 1 次に比例のとき

$z$  軸の正の向きを鉛直上向きにとる. 質量  $m$  の物体が重力 (重力加速度の大きさ  $g$ ) と空気抵抗の力を受けて  $z$  軸上を運動する. 空気抵抗の力の大きさが速さに比例する場合について (比例定数  $c_1 > 0$ ), 運動方程式を書き, 終端速度  $v_{1\infty}$  を安易な方法で求めよう.

## 3.4.2

1.  $z$  軸の正の向きを鉛直下向きにとる. 質量  $m$  の物体が重力 (重力加速度の大きさ  $g$ ) と空気抵抗の力を受けて  $z$  軸上を運動する. 空気抵抗の力の大きさが速さの 3 乗に比例する場合について (比例定数  $c_3 > 0$ ), 運動方程式を書き, 終端速度  $v_{3\infty}$  を安易な方法で求めよう.
2. 同様に 4 乗に比例する場合 (比例定数  $c_4 > 0$ ) について  $v_{4\infty}$  を求めよう.

## 3.4.3 チャレンジ問題(難しいかも)

鉛直上向きに  $z$  軸の正の向きをとる. 質量  $m$  の物体が重力(重力加速度の大きさ  $g$ ) と空気抵抗の力を受けて運動する. 空気抵抗の力の大きさが次のように与えられるとき, 物体の終端速度を安易な方法で求めよう.

1. 空気抵抗の力の大きさが, 速さ  $v$  を用いて  $4Av + v^2$  と書けるとき ( $A > 0$  は定数).
2. 空気抵抗の力の大きさが, 速さ  $v$  を用いて  $A(e^{B \cdot v} - 1)$  と書けるとき ( $A, B > 0$  は定数).

## 3.5 ちょっと難しい変数分離形

部分分数分解 [川薩四 p.210](#) は積分するときに役立つ.

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

## 3.5.1 部分分数分解

微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 - 4 \quad (3.1)$$

を解こう(積分変数は決めなくていい). *Hint* 部分分数分解. [川薩四 p.81](#)

## 3.5.2 部分分数分解

微分方程式

$$3 \times \frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 + x(t) - 2 \quad (3.2)$$

を解こう(積分変数は決めなくていい). *Hint* 部分分数分解. [川薩四 p.81](#)

## 3.5.3

$z$  軸の正の向きを鉛直上向きにとる. 質量  $m = 2$  の物体が, 重力(重力加速度の大きさ  $g = 10$ ), 速さに比例する大きさの空気抵抗の力(比例定数  $c = 2$ )を受ける. 物体が落下しているときの  $\frac{dz}{dt}(t)$  を求めよう.(積分定数は決めなくてよい).

## 3.5.4

[川薩四 例題 11.3\(p.210\)](#)

[川薩四 問題 1\(p.211\)](#)

[川薩四 第 11 章練習問題 1\(3\)2\(1\)\(2\)](#)

2007-12-09 土 です. <http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/suken/> と別紙参照.

## 授業お休みのお知らせ

来週 2007-10-18 Thu は報恩講のため 1,2 講時とも授業がありません.

## 秋のプチテストやります!

日時範囲などは Web や掲示を参照. 100 点中 15 点分です. 持ち込みなしです.

準備としては, まずこれまでの quiz がすんなり解けるようになりましょう. 次に, 演習の問題がゆっくりでも解けるようになりましょう. そのくらいで十分だと思いますが, この機会にもっと勉強したい人は, 教科書の例題や章末問題をやってみるといいでしょう.

これまでに quiz や演習で経験した問題と比べると, プチテストでの設問は今までに経験したどれかと同じです. したがって, '解き方をおぼえる' ことはそれなりに効果があります. (本当は解き方の意味までわかってほしいのですが, 今回のプチテストではそこまでは問えないと思います.) しかし, 数値や関数までそっくり同じ問題は出しません. 記憶力に頼って答案を丸ごとおぼえるような準備は有効でないと考えられます.



[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)