物理数学☆演習 II

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-12-06 Thu 更新: Time-stamp: "2007-12-07 Fri 18:51 JST hig"

10 ばねの力＋重力または微分方程式のいろんな解き方

今日の目標

1. つりあいの位置が $x=0$ でなくても解けるようになろう.
2. 鉛直方向に置かれたばね (ばねの力+重力 (+空気抵抗の力)) の運動を求められるようになろう
3. 便利な座標系をとれるようになろう
4. 微分方程式の変数分離形, 定数係数線形 (同次), 定数係数線形 (非同次) などのうち, 使える解き方を使って解けるようになろう.

10.1 自然長じゃないところが原点でもなんとかなる

$x=0$ じゃないところ ($x=a$) がつりあい (自然長) の位置だったらどうする?

1. 放っておく (数学で何とかする)
2. $X=x-a$ という座標をとり直せば, $X=0$ がつりあい (自然長) の位置

10.1.1 自然長じゃないところが原点

質量 $m=1$ の物体が, ばね定数 $k=4$ のばねにつながれ, 水平面上に置かれている. 物体は速さに比例する空気抵抗 (比例定数 $c=5$) を受ける.

壁の位置を $x=0$ とする x 座標をとると, ばねが自然長のときの物体の位置は $x=3$ だった.

1. 物体の位置 $x(t)$ についての運動方程式をたてよう.
2. 時刻 $t=0$ に, 物体を $x=\frac{9}{4}$ の位置において, 静かに手を放した. 物体の運動 $x(t)$ を求めよう.

10.1.2 非同次項のある線型微分方程式

次の微分方程式を解き, $x(t)$ のグラフを描こう.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+4x(t)-12=0, \quad x(0)=5, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4\sqrt{3}.$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

10.2　重力＋ばね

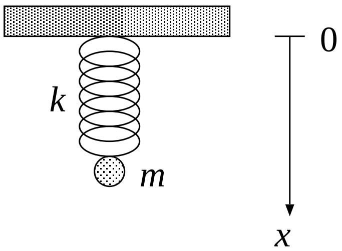
どこがつりあいの位置かわからなかったらどうする?

1. **放っておく (数学で何とかする)**
2. **物理でなんとかする. つりあいの位置は $x(t) =$ 一定 とおいて探せる.**

10.2.1

自然長 ℓ, ばね定数 k の (質量を無視できる) ばねの一端を天井に固定する. 質量 m の球をつるし, 上下方向にのみ運動させる.

鉛直下向きに x 座標をとり, 天井を原点とする. 時刻を t とする. 重力加速度の大きさを g とする.



1. **位置 $x(t)$ についての運動方程式を書こう.**
2. **物体が静止できる位置 x_0 (すなわち, 物体が力を受けない位置) を求めよう.**
3. **さらに, 物体の速さに比例する大きさの空気抵抗の力 (比例定数 $c > 0$) が加わるとする. 運動方程式を書こう.**
4. **$X(t) = x(t) - x_0$ が過減衰となるための c の条件を求めよう.**
5. **過減衰の場合の一般解を求めよう.**

10.2.2　ばねの上に物体

(何の力を受けていないときの) 自然長が ℓ であるような, ばね定数 k の軽いばねを, 床の上に垂直に置き, その上に質量 m の物体を載せる. 垂直上向きに z 軸をとり, 床を原点とする.

1. **運動方程式を書こう.**
2. **位置を調節して静かに手を離したら, 物体は静止したままだった. このときばねはどれだけ縮んでいるか考えよう.**
3. **時刻 $t = 0$ に, 物体が静止した状態からばねを a だけ伸ばして静かに手を離した. このことを初期条件として表し, 運動方程式を解いて物体の運動を求めよう.**

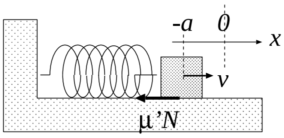
10.2.3　動摩擦力の場合も同じ!

質量 m の物体が, ばね定数 k のばねにつながれて, 水平面上に置かれている. 重力加速度を g とする.

面と物体の間の動摩擦係数を μ' とする. 面と物体の間の静止摩擦力は考えない.

ばねを自然長から $a(>0)$ だけ押し縮めて静かに手を離した. 自然長の位置を原点, 右向きに正に x 軸をとる.

ばねがのびて物体が一瞬静止するまでの運動を求めよう.



10.3　知ってるやり方総動員

今までにやったやり方

- 変数分離 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t))g(t)$.
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ (と $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$) があって, $x(t)(= \frac{\mathrm{d}^0x}{\mathrm{d}t^0}(t))$ がなければ, $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおいてまず $v(t)$ を求める. 次に $x(t)$ を求める.
- $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を決める.
- $X(t) = x(t) - a$ と置き直して定数項を消した後, $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて λ を決める.

方針決定のヒント (これを暗記しようとは思わないでね)

- 変数分離形は, その形にもっていけるならいつやってもいい. 積分さえできれば答えが求まる.
- $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおく, はいつやってもいいけど, おかしくなったらその方法はあきらめる.
- $x(t)$ 以外の場所に t がでてきてるときは $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおく, はたいていいだめ.
- 非線形 ($(x(t))^n$ や $F(x(t)) \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ のようになってるもの) は, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおく, はたいていいだめ.
- 線形 ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ は無視して, $x(t)$ について 1 次の項しかでてこない) の場合, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおく, が有効.

10.3.1

次の微分方程式の一般解 $x(t)$ を, なるべくいろいろな方法 (別解) で求めよう.

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 3x(t) + 2 = 0.$
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 = 0.$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\, t^2 - \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t)\right) t - x(t) = 0.$

4. $x(t) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 4.$
5. $\dfrac{1}{x(t)} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 4.$

お知らせ

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

物理数学☆演習 II の, **大学院入試の過去問や**, **プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです**. **その貢献に対して** 1 **問あたり最大** 10 **点**, 1 **人あたり最大** 20 **点の加算があります**.

ReLS `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` → **物理数学☆演習 II**
→ **模範解答を作ろうプロジェクト**!
に投稿されている問題に対して, (**部分的でもいいから**) **模範解答を紙に作成して**, **スキャンしたもの** (**後述**) **をフォーラムに返信してください**.

理工学部実習室 1-612 **で紙に書かれた解答を簡単にスキャンして** PDF **ファイルや** JPEG **ファイルにして** USB **フラッシュメモリに保存できます**.

スキャンの仕方の説明 `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

目次 目次 前回 次回 今回の解答