

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

物理数学 演習 II

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-12-20 Thu 更新: Time-stamp: "2007-12-25 Tue 10:35 JST hig"

12 力学的エネルギー保存則のいろんな使い方

今日の目標

1. 力学的エネルギー保存則を使っちゃいけない場合を判別できるようになる。
2. 複雑な力の場合も力学的エネルギー保存則を使うと楽であることを実感しよう。
3. ポテンシャル(位置エネルギー)のアバウトな情報しかなくても物体の運命を予言できるようになる。

12.1 いろんな力に対応する位置エネルギー

説明

力 F_1, F_2 の位置エネルギー $U_1(x), U_2(x)$ とする。

$$U_1(x) = - \int_0^x F_1(s) ds.$$

合力 $F = F_1 + F_2$ の位置エネルギーは

$$U(x) = - \int_0^x F(s) ds = - \int_0^x (F_1(s) + F_2(s)) ds = U_1(x) + U_2(x).$$

説明

位置エネルギーの原点は自由にとっていい

位置エネルギーは積分の下端を $x = 0$ から $x = a$ に変更しても、定数しか変わらない。

$$U_a(x) = - \int_a^x F(s) ds = - \int_0^x F(s) ds - \int_a^0 F(s) ds = U(x) - (\text{定数})$$

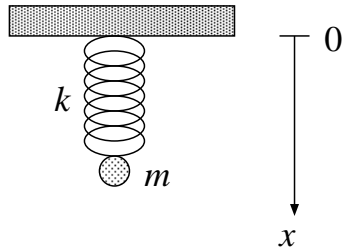
定数だけ変化しても、力は変わらないし、力学的エネルギー保存則では右辺の E にいれちゃえばいい。だから、(複数あるなら力ごとに) 便利な下端(原点)をとって、おぼえてる位置エネルギーの式を使っちゃっていい。

¹Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

12.1.1

自然長 ℓ , ばね定数 k の (質量を無視できる) ばねの一端を天井に固定する. 質量 m の球をつるし, 上下方向にのみ運動させる.

鉛直下向きに x 座標をとり, 天井を原点とする. 時刻を t とする. 重力加速度の大きさを g とする.

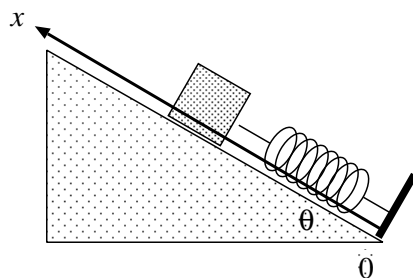


1. 重力の位置エネルギー $U_1(x)$, ばねの力の位置エネルギー $U_2(x)$ を求めよう.
2. 物体の力学的エネルギー保存則を書こう.
3. 物体をつりあいの位置から少し持ち上げ, $x = x_0$ にもってきて, 静かに手をはなしたところ物体は振動を始めた. 物体がいちばん下まで来たときの位置 x_1 を求めよう.

12.1.2 斜面と物体

図のような傾き θ の斜面に沿ってばね (自然長 ℓ , ばね定数 k) を置き, 地面側を固定する. 反対側に質量 m の物体をとりつける. ばねの力と重力 (重力加速度の大きさ g) だけがはたらき, 空気抵抗の力や摩擦力は考えない. 図のように, 地面を原点とし, 斜面に沿って上向きに x 軸をとる.

1. 物体が位置 x にあるときの, ばねの位置エネルギーと重力の位置エネルギーを求めよう.
2. 力学的エネルギー保存則を書こう.
3. 物体を $x = \ell + a (a > 0)$ までひっぱり, 静かに手をはなした. ばねがもっとも縮んだときの物体の位置を求めよう.



12.2 保存力と非保存力

説明

永田 6.5(p.105) **運動エネルギー** $K = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2$

位置エネルギー = **ポテンシャル(エネルギー)** $U(x) = -\int_0^x F(s) ds, F = -\frac{dU}{dx}(x)$

位置 $x(t)$	↗ 微分	速度 $\frac{dx}{dt}(t)$	↗ 微分	加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$	↔ 比例	力 F	↖ xで積分 ×(-1)	位置エネルギー $U(x)$
	↖ 積分		↖ 積分				↖ xで微分 ×(-1)	

力学的エネルギー保存則 $K + U = E$ ((時間によらない) 定数)

説明

F が **保存力** $\Leftrightarrow F$ に位置エネルギーが存在し, 力学的エネルギー保存則が成立する力

保存力 の例 (永田 6.4(p.104))
ばねの力 $F(x) = -kx$, 重力 $F(x) = -mg$, $F(x) = -x^3$ など位置 x だけから決まる力

非保存力 の例 (永田 6.4(p.104,108))
動摩擦力, 空気抵抗の力, $F = -t^2$, $F = -e^{-t}kx^2$ など, 位置 x だけでなく t や $\frac{dx}{dt}(t)$ にもよる力.

2,3次元の力は $F(\mathbf{r})$ の形でもふつうは非保存力 (↪ ベクトル解析, 力学(2年)).
保存力と非保存力の両方がある場合 (例:ばねの力と空気抵抗の力), やはり位置エネルギーは存在しない.
保存力の部分だけから位置エネルギーや力学的エネルギーを考えることもあるが, この場合, 力学的エネルギーは変化する.

12.2.1

質量 m の物体が, 水平な x 軸上を, 空気抵抗の力 (大きさが速さに比例し比例定数 c) だけを受けて運動する. 時刻 $t = 0$ に速度 v_0 で原点を通過した.

1. (力学的エネルギー保存則を使わずに, 運動方程式を解いて) 物体の運動 $x(t)$ を求めよう.
2. 時刻 t における運動エネルギーを求めよう.
3. 運動エネルギーが時刻 0 の半分になる時刻を求めよう.

12.2.2

質量 $m = 1$ の物体が, ばねの力 (ばね定数 $k = 4$), 大きさが速さに比例する空気抵抗の力 (比例定数 $c = 2$) のもとで運動する. 自然長の位置を原点とし, ばねののびる向きを正の向きとする x 座標をとる. 時刻 $t = 0$ にばねを 2 だけのばして静かに手をはなした.

1. (力学的エネルギー保存則を使わずに, 運動方程式を解いて) 物体の運動 $x(t)$, 速度 $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ を求めよう.
2. 運動エネルギーとばねの位置エネルギーの和を力学的エネルギー E とおく. $t = 0$ での E の値を求めよう.
3. 時刻 $t > 0$ で初めて物体が静止した時刻における E の値を求めよう.
4. 時刻 $t > 0$ で n 回目に物体が静止した時刻における E の値を求めよう.

12.3 一般のポテンシャルのもとでの運動

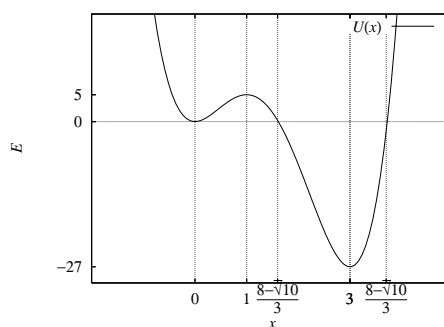
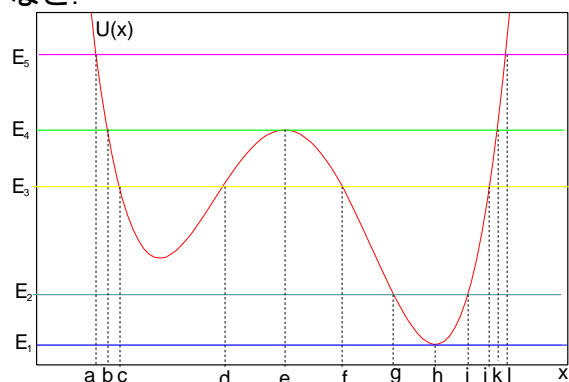
説明

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}(t) \right)^2 \geq 0$$

なので,

- 物体は $E - U(x) \geq 0$ の領域しか運動できない.
- 物体は $U(x)$ の低い側に向けた力を受ける.
- 物体は $E = U(x_0)$ となる点で (一瞬) 停止する (そして引き返す)
- 物体は $-\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$ であるような点では力を受けない (平衡点). ちょうど $E = U(x_0)$ ならずとそこに静止できる.

など.



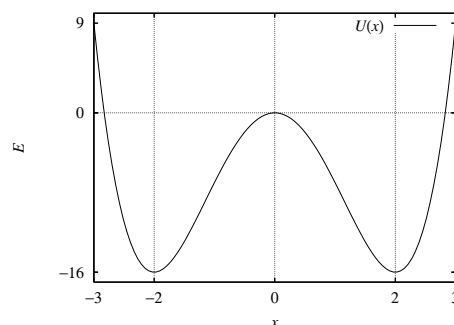
左はそれなりな関数. 右は $U(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$.

12.3.1

図のポテンシャルのもとで, $E = E_2, E_5$ の物体の運動を (授業でやったのりで) 説明しよう.

直線上を運動する質量 $m = 2$ の質点を考える. 直線上に x 座標をとる. 位置エネルギーは $U(x) = x^4 - 8x^2$ である. 関数 $U(x)$ のグラフは図のようになる.

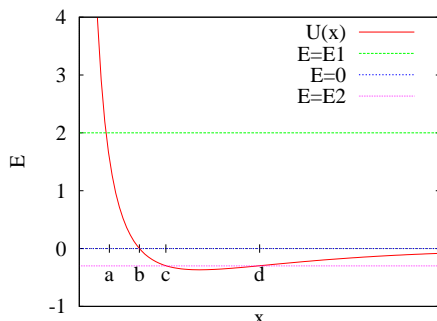
1. 質点のうける力 $F(x)$ を求めよう.
2. 平衡点をすべて求めよう.
3. 時刻 $t = 0$ には, 質点の位置は $x(0) = -2$, 速度は $\frac{dx}{dt}(0) = -2$ だった. 位置エネルギー, 運動エネルギー, 力学的エネルギーの関係をを利用して, 時間 $t > 0$ に質点が運動する範囲と, 運動の様子を答えよう.



4. 削除
5. 時刻 $t = 0$ には, 質点の位置は $x(0) = -2$, 速度は $\frac{dx}{dt}(0) = -2$ だった. 位置 $x = -\sqrt{3}$ を通過するときの速度を求めよう.
6. 時刻 $t = 0$ に, 位置 $x(0) = -2$ から出発した質点が, $t > 0$ のどこかの時点で, 位置 $x = \sqrt{6}$ に到達する, あるいは通過するためには, 初速度 $\frac{dx}{dt}(0)$ はどのような範囲の値でなくてはならないか, エネルギー保存則を利用して答えよう.

12.3.3 Quiz

力学的エネルギーが $E = E_1, 0, E_2$ の物体の運動の様子を答えよう. ただし $\frac{dx}{dt}(0) < 0$.



お知らせ

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

物理数学 演習 II の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみinnで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります.

ReLS <https://r-els.media.ryukoku.ac.jp> → 物理数学 演習 II

→ [模範解答を作ろうプロジェクト!](#)

に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの(後述)をフォーラムに返信してください.

物理数学 演習 II 12 回めの問題 (2007-12-20 Thu)

6

理工学部実習室 1-612 で紙に書かれた解答を簡単にスキャンして PDF ファイルや JPEG ファイルにして USB フラッシュメモリに保存できます。

スキャンの仕方の説明 <http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php>

[目次](#) [目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)



<http://hig3.net>