# お知らせ

## チューター

| 曜日 | 時間 | 担当 | 部屋 |
|---|---|---|---|
| 月 | 12:30〜14:30 | 前 | 1 号館 615 |
| 月 | 12:30〜13:30 | 郷原 | 1 号館 539 |
| 水 | 12:30〜13:30 | 田中 | 1 号館 530 |
| 木 | 12:30〜13:30 | 前 | 1 号館 615 |
| 金 | 15:10〜16:40 | 近藤 | 1 号館 541 |

## 予定

- 秋のプチテスト 11/15 (予定). 配点 15 点
- 冬のプチテスト 12/20 (予定). 配点 25 点

## 3.6 先週の quiz の略解と復習

1.

21

$$x(t) = \tfrac{1}{2}t^2, \quad y(t) = \tfrac{1}{12}t^4 + 1, \quad z(t) = 0. \tag{35}$$

**軌跡とは**, $(x, y)$ **平面上の曲線で**, **それにそって物体が運動したもののこと**. **それを表わす** $x, y$ **の式を求めるには**, $x = x(t)$ **と** $y = y(t)$ **から** $t$ **を消去すればよい**.

$$y = \tfrac{1}{3}x^2 + 1. \tag{36}$$

2. **注意**: $\boxed{\vec{F} = (0, 0, -mg) \text{ は運動方程式ではない}}$

**運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg. \tag{37}$$

**初期条件は**

$$x(0) = y(0) = 0, \quad z(0) = h, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \sin\theta. \tag{39}$$

# 4 変数分離型微分方程式

## 4.1 空気抵抗のある場合の運動

佐本 8.1.1

空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. たとえば, エアホッケーのパックの運動.

物体の受ける $\boxed{\text{空気抵抗}}$ は, 向きは速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ と反対向き, 大きさは速さ $|v(t)| = |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)|$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力}\quad F = -k \times v(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \quad (k\ \text{は正の比例定数}) \tag{40}$$

質量を $m$ とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{41}$$

1 階微分で書こう． $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ なので,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t).} \tag{42}$$

しばらくこのタイプの微分方程式の解を考えよう．微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

$$v(t) = \boxed{{}_{22}C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}. \quad C:\text{積分定数}} \tag{43}$$

## 4.2 変数分離型微分方程式の解き方

**例題 5** 次の性質を満たす関数 $x(t)$ を求めよう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \text{初期条件 } x(0) = 4. \tag{44}$$

(文字 $v$ を $x$ に変えましたが, 深い意味はありません).

**間違いの例 1.** 両辺を ‘積分’ して,

$$x = x^2 + C. \text{よって } x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4C}}{2}. \tag{45}$$

あれっ, $x$ って $t$ の関数 $x(t)$ じゃなかったの?

間違った点: 23 左辺は $t$ で, 右辺は $x$ で積分してしまった

両辺を $t$ で積分する (両辺に $\int \cdots \mathrm{d}t$ をつける) ならよい.

**間違いの例 2.** 両辺を $t$ で積分して,

$$x(t) = \int 2x(t)\mathrm{d}t + C. \tag{46}$$

正しくない点: 24 右辺に未知関数 $x(t)$ が残ってるよ.

2 次方程式 $x^2 + 2x + 1 = 0$ の解を $x = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ と答えるようなもの.

**正しい解き方の例**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{47}$$

まず $x(t)$ を左辺に集める. 今の式には $t$ はないが, あれば右辺に集める.
以下の例題を参照.

$$\frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2 \tag{48}$$

**両辺を $t$ で積分**

$$\int \frac{1}{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t = \int 2\, \mathrm{d}t \tag{49}$$

**ここで**,

$$\text{右辺} = \int 2\, \mathrm{d}t = 2t + C_1. \tag{50}$$

**一方**, **左辺で変数変換**. **変数を** $t$ **から** $s = x(t)$ **に変えて置換積分**.

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t \tag{51}$$

**なので**,

$$\text{左辺} = \int \frac{1}{s}\, \mathrm{d}s = \log|s| + C' = \log|x(t)| + C_2. \tag{52}$$

**よって**,

$$\log|x(t)| = 2t + C' (= 2t + C_1 - C_2) \tag{53}$$

**両辺の** exp **をとって**

$$\mathrm{e}^{\log|x(t)|} = \mathrm{e}^{2t+C'} \tag{54}$$

$$|x(t)| = \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{C'} \tag{55}$$

$$x(t) = \pm\,\mathrm{e}^{C'}\mathrm{e}^{2t} \tag{56}$$

$\pm\mathrm{e}^{C'}$ **は任意の実数値をとれる．これを積分定数** $C$ **とおく．**

$$x(t) = C\mathrm{e}^{2t} \tag{57}$$

**初期条件** $x(0) = 4$ **より**, $C = 4$

$$x(t) = 4\mathrm{e}^{2t} \tag{58}$$

**これが答え．必ず検算しよう．**

## 覚え方 (この科目の試験ではこのやり方でいい)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{59}$$

**$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を分数であるかのように考え, 左辺に $x$, 右辺に $t$ をまとめるように通分して**

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\mathrm{d}t \tag{60}$$

[25]**(このとき $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$ はひとかたまりと思う). 両辺に $\int$ を追加して,**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int 2\mathrm{d}t + C' \tag{61}$$

上で見た解き方は,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x)g(t) \tag{62}$$

のような形 ( $\boxed{\text{変数分離形}}$ ) のときに使える.

いままでやってきた微分方程式も, 実は変数分離形と思える. 当面, すべての微分方程式はこの方法で解くと考えよう.

**例. 落体の運動**

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg \tag{63}$$

これは変数分離形 ( $f(x) = 1, g(t) = -mg$ などと思える). 両辺に $\mathrm{d}t$ をかけて

$$\mathrm{d}v = -\,g\,\mathrm{d}t \tag{64}$$

**両辺に $\int$ をつけて**

$$\int 1 \, \mathrm{d}v = \int (-g) \, \mathrm{d}t + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \tag{65}$$

$$v(t) = -gt + C \tag{66}$$

## 例題 6

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{t}{x(t)}, \quad x(0) = 2. \tag{67}$$

を解こう

26

## 4.3 今週の quiz

**次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解こう．**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t), \quad x(0) = 2. \tag{68}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 2. \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \tag{70}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \tag{71}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \tag{72}$$