秋のプチテスト

日時 11/15(金)14:15-15:00. なお, 13:30–14:15 は講義をします.

場所 1-107 講義室 (通常通りですが, 講義のはじめから座席指定します)

持込 すべて不可.

出題範囲 11/1(金) の講義の内容まで. 運動の法則. 運動方程式. 変数分離型微分方程式の解法.

成績 この試験の成績は, 科目の成績 100 点のうち 15 点分にあたります. 今回と今後の試験の成績通知はメールで行います. ただし, 龍大インターネットのメールアドレスを以下のように 登録した人にのみ 行います. 個別の成績の問い合わせには応じられません. ページ
`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`
の手順にしたがって, `hig-mark@bird.math.ryukoku.ac.jp` にメールを送って登録してください. 携帯電話への転送方法も上のページに書いてあります.

4.4 先週の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{t}, \quad C = 2. \tag{73}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = 2. \tag{74}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C = 1/2. \tag{75}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C = 3. \tag{76}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \rightsquigarrow x(t) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C = 2. \tag{77}$$

ちょっとだけ説明

27

5 空気抵抗のある場合の落下運動

5.1 鉛直方向の運動

質量 m の物体が重力 $-mg$ と空気抵抗の力 $-k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ のもとで運動する. 鉛直上向きに z 軸をとり, 時刻 t の位置を $z(t)$ とする. 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + k\times\left\{\begin{matrix} +\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) < 0\right) \\ -\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) > 0\right) \end{matrix}\right\} = -mg + k\times\left(-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right) \tag{78}$$

第 2 項の符号がこれでよいこと. $+$:上向き. $-$: 下向き.

速度	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$	1 行目 $\pm\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|$	2 行目 $-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$
上向き	$(-)$	$(+)\times(+)=(+)$	$(-)\times(-)=(+)$
下向き	$(+)$	$(-)\times(+)=(-)$	$(-)\times(+)=(-)$

$k\times\left(-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ の $-$ は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.

2 階は 1 階ずつ考えるのだった. $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **なので,**

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{79}$$

を $v(t)$ **について解く. これは変数分離型なので,** v **を左に** t **を右に.**

28

よって解は,

$$v(t) = \boxed{29 -\frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}} \tag{80}$$

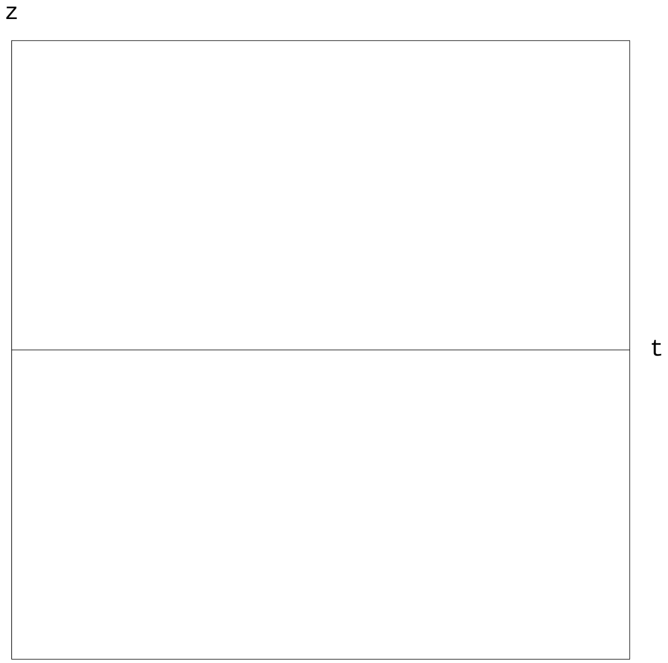
$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ なので, これを $z(t)$ についての変数分離型微分方程式とみて解く.

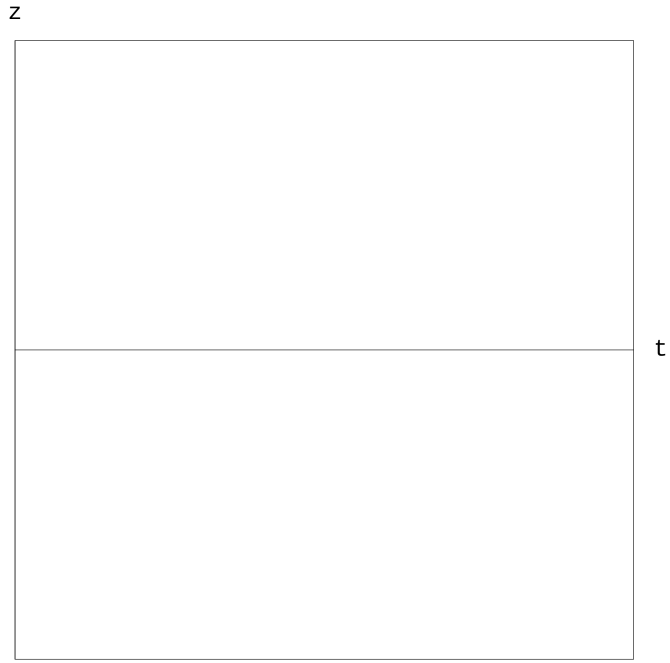
30

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{81}$$

なお, $t \to \infty$ で $v(t) \to v_\infty = -\frac{mg}{k}$ となる. この v_∞ を 終端速度 という. 微分方程式を解かなくても, $0(= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v_\infty$ を解くだけで得られる.

物理数学 II　52　(2002/10/25)





5.2 空気抵抗のもとでの放物運動

質量 m の物体を考える. 鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる.

z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 位置 $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{82}$$

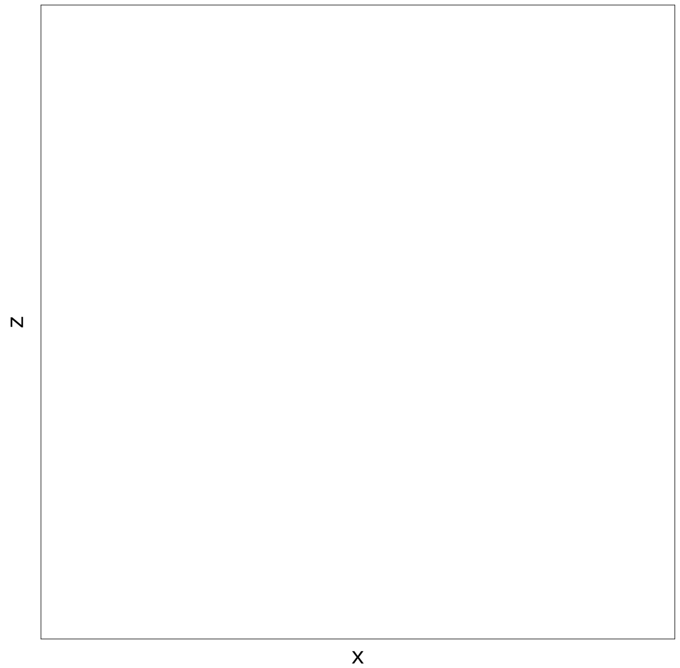
成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) \tag{83}$$

まず, $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対する 1 階の微分方程式と考え,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -kv_x(t), \qquad m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - kv_z(t) \tag{84}$$

を別々に変数分離型微分方程式として解く.



$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{85}$$

$$v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{mg}{k} + C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{86}$$

$x(t), z(t)$ **について解くと**,

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{87}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{88}$$

終端速度 **は** 31 $(0, -\frac{mg}{k})$

例題 7 通常，空気抵抗の力の大きさは，速度に比例するが，仮に，速度の 2 乗に比例する空気抵抗と重力とを受ける物体があったとする．時刻 $t=0$ に，速度 $v_0(<0)$ で発射する．運動方程式をたて，速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ について解け．終端速度 v_∞ はどれだけか．質量を m，比例定数を k とする．

運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=-mg+\boxed{32k\times\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\times\begin{cases}(+1) & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)<0\right),\\ (-1) & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)>0\right).\end{cases}} \tag{89}$$

問題の運動では，常に $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)<0$ であるので，

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=-g+\frac{k}{m}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\times(+1) \tag{90}$$

よって, $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2 \tag{91}$$

を解く. 変数分離形なので,

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}}\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{92}$$

ここで,

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \frac{A}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}} + \frac{B}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} \tag{93}$$

とおいて, A, B を

33

のように決定することにより，部分分数展開

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \boxed{34 \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}} - \frac{1}{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)} \tag{94}$$

が求まる．

$$\int \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}-\frac{1}{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)\mathrm{d}v = \frac{k}{m}\int \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}\left(\log\left|v-\sqrt{\frac{mg}{k}}\right|-\log\left|v+\sqrt{\frac{mg}{k}}\right|\right) = \frac{k}{m}t + C$$

$$\log\left|\frac{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t + C'$$

$$\frac{v-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v+\sqrt{\frac{mg}{k}}} = \pm\,\mathrm{e}^{C'}\cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}$$

C, C' は積分定数．$C'' = \pm\mathrm{e}^{C'}$ とおく．ここで C' を決めておく．初期条件により，$t=0$ のとき $v(0)=v_0$ なので，

$$C'' = \frac{v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}}}. \tag{95}$$

元に戻って，分母を払った

$$\left\{v(t)-\sqrt{\frac{mg}{k}}\right\}=C''\cdot\mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}\left\{v(t)+\sqrt{\frac{mg}{k}}\right\} \tag{96}$$

は $v(t)$ **について** 1 **次方程式なので，解くと，**

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\times\frac{1-\frac{1}{C''}\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}{1+\frac{1}{C''}\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}} \tag{97}$$

$t\longrightarrow\infty$ **を考えると，**

$$\textbf{終端速度}\ v_\infty=\boxed{35\ \sqrt{\frac{mg}{k}}} \tag{98}$$

これは

$$\boxed{36\ 0=\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=\right)-g+\frac{k}{m}v_\infty^2} \tag{99}$$

からも求まる．

5.3 きょうの quiz

1. 次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．(Hint. 右辺を因数分解して部分分数展開)

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t)^2 - x(t) - 2 \tag{100}$$

2. 1 次元を運動する質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の位置を $x(t)$ とする．この物体は, 速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ によって決まる力 $F = -v(t) - v(t)^2$ を受けている．時刻 $t = 0$ での速度は $v(0) = 1$ である．
   (a) 運動方程式を書こう．
   (b) 初期条件を書こう (1 個しかない)．
   (c) 時刻 $t = 1$ における速度 $v(1)$ を求めよう．

3. 次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) + 2 = 0. \tag{101}$$