

集合 位相 + 演習

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-10-30 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:00 JST hig"

6 プチテストに備えよう

6.1 論理と集合の復習

6.1.1

略解

$S_1 \subset S_2$ であること $(x_1, x_2) \in S_1$ とすると, $x_1^2 + x_2^2 < 1$. よって, $x_1^2 < 1 - x_2^2 < 1$. 同様に $x_2^2 < 1 - x_1^2 < 1$ よって, $|x_1| < 1 \wedge |x_2| < 1$ であり $(x_1, x_2) \in S_2$.

$S_1 \supset S_2$ でない, したがって $S_1 = S_2$ でないこと $(x_1, x_2) = (0.9, 0.9)$ が反例になっている. $|x_1| = 0.9 < 1, |x_2| = 0.9 < 1$ より $(x_1, x_2) \in S_2$. しかし, $x_1^2 < 1 - x_2^2 = 0.81 \times 2 > 1$. であり, $(x_1, x_2) \notin S_1$.

1. $0 \in S_1$ の必要十分条件は $\exists y (0 \cdot y < 0 \wedge y > 0)$. これは偽 (常に $0 \cdot y = 0$ だから).
一般に $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.
- $0 \in S_2$ の必要十分条件は $\forall y (0 \cdot y \leq 0)$. これは真.
一般に $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x = 0\} = \{0\}$.

6.2 写像の全射単射の復習

6.2.1

略解

1. 全射でない ($f(x) = 1$ となる x がない). 単射でない ($f(1) = f(-1)$).
2. 単射である. 全射でない ($f(x) = -1$ となる x がない).
3. 全単射.
4. 全射でない ($f(x) = 2$ となる x がない). 単射でない ($f(1) = f(-1)$).

6.3 写像の像・逆像の復習

6.3.1

略解 **ごめんなさい. 2 は問題がおかしかったので 2 通りの修正をのせています.**

¹Copyright ©2007,2008 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

1. $f(X_1) = \{0, 1, 4\}$, $f^{-1}(Y_1) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. $f(X_1) = \{1, 3\}$, $f^{-1}(Y_1) = \{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$
3. $f(X_1) = \{0, 1\}$, $f^{-1}(Y_1) = \{3n | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$.
4. $f(X_1) = \{1, 4, 512\}$, $f^{-1}(Y_1) = \{2\}$.

6.4 濃度の復習

6.4.1

略解

1. $\#X = \aleph < \#Y = 2^\aleph$
2. どちらも \aleph .
3. $\#X = \aleph_0 < \#Y = \aleph$.

6.4.2 2007-11-06 quiz 2

略解

• P_1

どか1 T. なぜなら すべての $x \in \mathbb{N}$ に対して $x + x = 2x$ は2の倍数.

どか2 T. なぜなら すべての $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ に対して $x_1 + x_2$ が2の倍数ならば $x_2 + x_1 (= x_1 + x_2)$ も2の倍数.

どか3 T. なぜなら すべての $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ に対して $x_1 + x_2 = 2k_1$, $x_2 + x_3 = 2k_2$ のとき, $x_1 + x_3 = 2(k_1 + k_2 - x_2)$ は2の倍数.

• P_2

どか1 F. 反例 $x = 1$.

どか2 T. なぜなら すべての $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ に対して $x_1 + x_2$ が2の倍数ならば $x_2 + x_1 (= x_1 + x_2)$ も3の倍数.

どか3 F. 反例 $x_1 = x_3 = 1, x_2 = 2$.



目次 前回 次回 今回の問題