集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-12-04 Tue 更新: Time-stamp: "2007-12-14 Fri 11:14 JST hig"

11 内部・外部・境界

11.1 閉集合

11.1.1

略解

1. 閉集合
2. 開集合
3. 開集合
4. 閉集合
5. 開集合でも閉集合でもない
6. 閉集合
7. 開集合
8. 閉集合

11.1.2

略解

1. 閉集合
2. 開集合でも閉集合でもない
3. 開集合でも閉集合でもない
4. 開集合でも閉集合でもない
5. 閉集合
6. 開集合でも閉集合でもない
7. 開集合
8. 開集合であり閉集合でもある

11.2 有理数・無理数・実数の微妙な性質

11.2.1

略解

1. $\max A$, $\min A$, $\inf A$ は存在しない. $\sup A = \pi$. $\max B$, $\sup B$ は存在しない. $\min B = \inf B = \pi$.
2. $\min C$, $\inf C$ は存在しない. $\max C = \sup C = 3$. $\max D$, $\sup D$ は存在しない. $\min D = \inf D = 4$.
3. $\max E$, $\min E$, $\inf E$, $\sup E$ は存在しない. $\max F$, $\min F$, $\inf F$, $\sup F$ は存在しない.

11.2.2

略解 $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は開でも閉でもない.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

11.2.3

略解　模範解答をつくろうプロジェクトで使用するかも

11.3　外点・境界点

11.3.1

略解

1. **境界点**
2. **内点**, $\epsilon \leq 1$
3. **境界点**
4. **内点**, $\epsilon \leq \frac{3}{2}$
5. **外点**, $\epsilon \leq 101$.
6. **内点**, $\epsilon \leq \min\{|1-x|, |-1-x|\}$.
7. **外点**, $\epsilon \leq \min\{|1-x|, |-1-x|\}$.

11.3.2

略解

1. **境界点**
2. **内点**, $\epsilon \leq 2$
3. **内点**, $\epsilon \leq \frac{1}{2}$
4. **外点**, $\epsilon \leq 1$
5. **内点**, $\epsilon \leq 2 - d(x, O)$.
6. **境界点**
7. **外点**, $\epsilon \leq d(x, O) - 2$.

11.4　外部・境界

11.4.1

略解　$A^{\mathrm{i}} = (0,1), A^{\mathrm{e}} = (-\infty, 0) \cup (1,2) \cup (2, +\infty), A^{\mathrm{f}} = \{0,1,2\}, A^{\mathrm{a}} = [0,1] \cup \{2\}$

11.4.2

略解

(1) $A^{\mathrm{i}} = A$, $A^{\mathrm{e}} = (-\infty, 0)$, $A^{\mathrm{f}} = \{0\}$, $A^{\mathrm{a}} = [0, +\infty)$.
(2) $A^{\mathrm{i}} = A$, $A^{\mathrm{e}} = \emptyset$, $A^{\mathrm{f}} = \mathbb{N}$, $A^{\mathrm{a}} = \mathbb{R}$.
(3) $A^{\mathrm{i}} = \emptyset$, $A^{\mathrm{e}} = \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$, $A^{\mathrm{f}} = A \cup \{0\}$, $A^{\mathrm{a}} = A \cup \{0\}$.

解説　$\boxed{\text{実数}}$**と**$\boxed{\text{実数の集合}}$**を混同した解答をよく見かけました．気をつけましょう．**

例えば，実数の集合を答えるところで，$\{\mathbb{R}\}, \{\mathbb{N}\}, \{\emptyset\}$ **など．**$\mathbb{R}, \mathbb{N}, \emptyset$ **などはそれだけで集合を表す記号ですから，さらに** $\{\}$ **にいれるのは変です．**

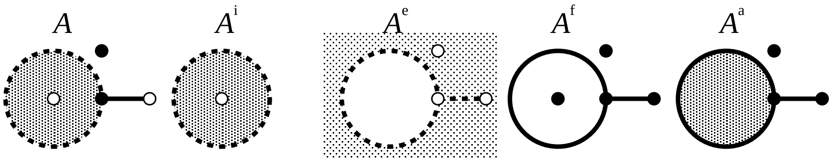
また，$\{\mathbb{R} - \frac{1}{n}\}$ **という答えも見かけました．**$\mathbb{R}$ **は集合，**$\frac{1}{n}$ **は実数ですから，その間で演算をすることはできません．たぶん**$\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ **を意図した答案でしょう．これなら第 2 項が集合になりますから，**$\mathbb{R}$ **との間で差集合をとることが可能になります．**

$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = (0,1)$ **と思ってる答案も時々見かけました．左辺はとびとびの集合なので，べたっとある右辺とは違います (濃度で言うと左辺は** $\aleph_0$**，右辺は** $\aleph$ **です)．**

また，$+\infty, -\infty$ **は数ではなく，**$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ **などの元ではなく，等式，不等式にも参加しません．区間** $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ **ですが，**$(0, \infty)$ **は** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ **の略記にすぎません．したがって，**$\mathbb{R} \setminus (0, \infty) = (-\infty, 0]$ **であり，**$+\infty \notin (\mathbb{R} \setminus (0, \infty))$ **です．**

3. では $0 \in A^{\mathrm{f}}$ だというところがいちばんのポイントです. 自分は A の元じゃないけど, どんなに小さい ϵ に対しても $N(x;\epsilon)$ は A の元を含むからなあ (例 $1/([2/\epsilon])$. ここで $[x]$ は x の整数部分).

11.4.3

略解 

11.4.4

略解　$\mathbb{Q}^{\mathrm{i}} = \emptyset, \mathbb{Q}^{\mathrm{e}} = \emptyset, \mathbb{Q}^{\mathrm{f}} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}^{\mathrm{a}} = \mathbb{R}$.
$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathrm{i}} = \emptyset, (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathrm{e}} = \emptyset, (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathrm{f}} = \mathbb{R}, x(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathrm{a}} = \mathbb{R}$.