ベクトル解析∇プチテスト

樋口さぶろお*[1]　配布: 2011-06-08 Wed 更新: Time-stamp: "2011-06-20 Mon 16:50 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

点 $(2,-1)$, 点 $(2,4)$ を両端とする線分のパラメタ表示を作ろう.

2

過程不要

パラメタ表示された曲線 $\mathbf{r}(t)=(-2+2\cos 2t, 2+2\sin 2t) \quad (-\frac{1}{4}\pi \leq t \leq 0)$ を描こう.

3

パラメタ表示された曲線 C: $\mathbf{r}(t)=(2t^3-3t^2, t^2)$ $(0 \leq t \leq 5)$ を考える. 曲線 C の, 点 $(27,9)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.

4

パラメタ表示された曲線 $\mathbf{r}(t)=(1+3\sin 4t, 3-4\cos 4t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$ を考える. 点 $\mathbf{r}(\frac{1}{16}\pi)$ における曲線の単位法線ベクトルをひとつ求めよう.

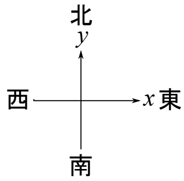
5

スカラー場 $f(\mathbf{r})=x^2+2xy-3y^2$ の, 曲線 C: $\mathbf{r}(t)=(t^2, 2t^2) \quad (-2 \leq t \leq -1)$ 上の線積分を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

6

xy 平面上の位置 $\mathbf{r} = (x, y)$ における温度と風がそれぞれ



スカラー場　$f(\mathbf{r}) = -30 - x^2 + 5x + 2y^2$
ベクトル場　$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2x + y + 1, x - 2y + 3)$

で与えられる．これらは時間で変化しない．
ジェンツーペンギンの時刻 t における位置ベクトルは $\mathbf{r}(t) = (t, -t + 1)$ である．

1. ジェンツーペンギンがいちばん寒いと感じる時刻を求めよう．
2. ジェンツーペンギンが北風を感じる時刻を求めよう．ただし, y 軸の正負の向きをそれぞれ北南とする．北風とは北から南に向かって吹く風のことである．

7

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x^2 + 5y^4, x^2y + 2y^5)$ の, 曲線 C: $\mathbf{r}(t) = (t^2, -t)$ $(1 \leq t \leq 2)$ ただし始点 $(1, -1)$, 終点 $(4, -2)$ に沿った線積分を求めよう．

8

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2\mathrm{e}^{2x-y}, -\mathrm{e}^{2x-y} + y)$ の, 曲線 C: $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$ $(0 \leq t \leq 2)$ ただし始点 $(0, 0)$, 終点 $(8, 4)$ に沿った線積分を求めよう．

9

スカラー場 $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{10}(y - 2x)^2$ を考える．

1. f の勾配ベクトル場 $\mathbf{V}$ を求めよう．
2. スカラー場 f の等高線 (高さは等間隔で) と, 勾配ベクトル場 $\mathbf{V}$ とを, この 2 つの関係に注意して重ねて描こう．

10

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (6x^2y^3 + 6xy^4, 6x^3y^2 + 12x^2y^3 + 6y)$ を考える．

1. $\mathbf{V}$ は保存的かどうか答えよう．
2. $\mathbf{V}$ が保存的な場合には, ポテンシャル $f(\mathbf{r})$ をひとつ求めよう．

ベクトル解析∇プチテスト略解

樋口さぶろお[*2] 配布: 2011-06-08 Wed 更新: Time-stamp: "2011-06-20 Mon 16:50 JST hig"

■配点 各 10 点, 計 100 点.

1

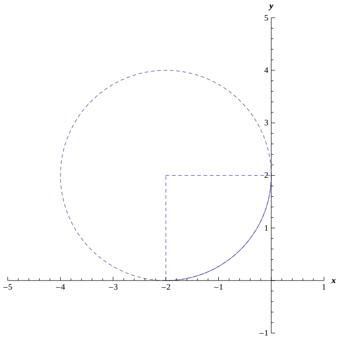
$\mathbf{r}(t) = (2, t) \quad (-1 \le t \le 4).$

■採点・配点 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}t$ と書いたときの $\mathbf{A}$ 2 点, $\mathbf{B}$ 4 点, t の範囲 4 点.

■講評 t の範囲を書いていない人が多かった. 線分なんだから範囲あるよね〜

2

$(-2, 2)$ を中心とする半径 2, 中心角 $\pi/2$ の円弧で, 両端は $(-2, 0)$,$(0, 2)$.



■採点・配点 中心が正しい円であること 4 点, 半径が正しいこと 2 点. 両端の 2 点が正しいこと各 1 点, 中心角 2 点.

■講評 t の範囲の両端の値を代入してみると曲線の端点になるはずだよね.

3

$\mathbf{r}(t) = (27, 9)$ を解くと, $t = 3$. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (6(t^2 - t), 2t)$. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(3) = (36, 6)$. よって, 接線のパラメタ表示は,

$$\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = (27, 9) + (36, 6)(t - 3).$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

■採点・配点　$t_0 = 3$ 2 点. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ 1 点, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ 2 点, パラメタ表示の形 5 点.

■講評　接線は直線, 接線ベクトルはベクトル. きかれているものを答えよう.

4

$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (12\cos 4t, 16\sin 4t)$. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{16}\pi) = (12/\sqrt{2}, 16/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(3,4)$. よって法線ベクトルは $\mathbf{N} = 2\sqrt{2}(-4,3)$.

単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{2\sqrt{2}\cdot(-4,3)}{2\sqrt{2}\cdot 5} = (-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5})$$

符号が逆のものも単位法線ベクトルである.

■採点・配点　$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ 1 点, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{16}\pi)$ 3 点, $\mathbf{N}$ 3 点, $\mathbf{n}$ 3 点.

■講評　法線は直線, 法線ベクトルはベクトル. きかれているものを答えよう.

5

$$\int_C f\ \mathrm{d}s = \int_{-2}^{-1} f(\mathbf{r}(t))\left|\tfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|\ \mathrm{d}t = \int_{-2}^{-1} -7t^4 \cdot 2\sqrt{5}|t|\ \mathrm{d}t = \int_{-2}^{-1} -7t^4 \cdot 2\sqrt{5}(-t)\ \mathrm{d}t = -147\sqrt{5}$$

■採点・配点　スカラー場の線積分の定義 3 点, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}|$ 3 点, 結果 3 点, 符号 2 点.

■講評　線積分にはスカラー場の線積分 (マーク 0) とベクトル場の線積分 (マーク 1) さらに保存場非保存場があるからな〜 f がでてきたからって差をとればいいってものじゃない. スカラー場の線積分は断面積だけど保存的なベクトル場の線積分は登った高さの合計.

$\sqrt{t^2} = |t|$ であって, $\sqrt{t^2} = +t$ とはかぎらない, って quiz の時に言ってたのをそのまま出題してみました.

6

1. ジェンツーペンギンが時刻 t に感じる温度は, $f(\mathbf{r}(t)) = -30 + t^2 + t + 2$. よって 時刻 $t = -\frac{1}{2}$ で最小値をとる.
2. ペンギンが時刻 t に感じる風は, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = (2t + (-t+1) + 1, t - 2(-t+1) + 3) = (t+2, 3t+1)$. これが北風 $(0,-1)$ と平行になる時刻を考えると $t = -2$. このとき, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(-2)) = (0,-5)$ であり, 南風ではなく北風である.

■採点・配点　1. $f(\mathbf{r}(t))$ を考えている 2 点, 最小値を考えている 2 点, 結果 1 点.

2. $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$ が $(0,-1)$ と平行, を考えている 2 点, 時刻 1 点, 南風でなく北風チェック 1 点.

■講評　ベクトル場と位置ベクトルの直観がはたらくっていうのが目標で, 別に風が正面とか真横とかを暗記してるって大事じゃないし．過去の似た知識を繰り出すのではなくて日本語を理解して反応しよう.

2. では, 記述式試験では, 目で見て明らかでも, 北風であることを言うことが必要.

7

渦なし条件をみたさないので保存的でない．したがって, 与えられた曲線に沿って積分するしかない.

$$\int_C \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^2 (t^4+5t^4, -t^5-2t^5)\cdot(2t,-1)\,\mathrm{d}t = \frac{315}{2}.$$

■採点・配点　ベクトル場の線積分の定義 5 点, 正しく $\mathbf{V}(\mathbf{r})$,$\mathbf{r}(t)$ を代入できている 2 点, 結果 3 点.

8

このベクトル場は保存的で, ポテンシャル $f(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{2x-y} + \frac{1}{2}y^2$ を持つことがわかる．よって線積分は,

$$\int_C \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(8,4) - f(0,0) = \mathrm{e}^{12} + 7.$$

■Remark　この曲線に沿ってそのまま線積分しても, 原始関数 $F(t)$ を求めるのはたいへん (今の場合はたまたま求まるけど).

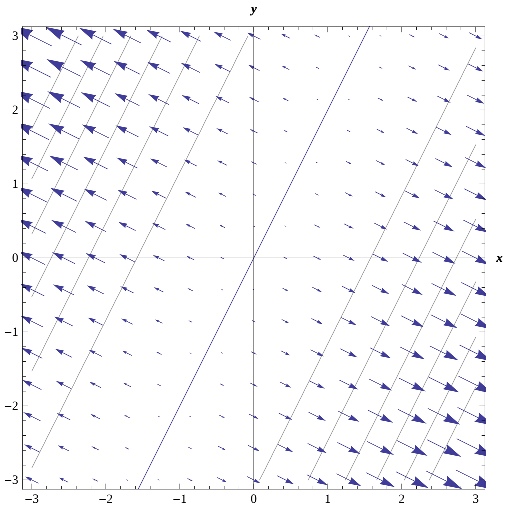
保存的なので, 両端を保ったまま曲線を変更することは許される．例えば $(0,0)$, $(8,0)$, $(8,4)$ という折れ線に沿って線積分することは可能で, もちろんポテンシャルの差と同じ結果を与える.

■採点・配点　保存的であることを使う方針: 保存的である 1 点, ポテンシャル 4 点, 差を考える 3 点, 結果 2 点.

保存的であることを使わない方針: 線積分の定義が具体的に書けている 4 点, 答 6 点.

9

1. 勾配ベクトル場は $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) = (-\frac{2}{5}(y-2x), \frac{1}{5}(y-2x))$.
2. 等高線 $f(\mathbf{r}) = C$ は直線 $y - 2x = \pm\sqrt{10C}$. 等高線と, 勾配ベクトル場がいたるところ直交することから, 勾配ベクトル場は $(2, -1)$ に平行.
   f の等高線が密なところほど勾配ベクトル場の絶対値は大きく, また, 向きは f の大きくなる向きであることに注意すると, 次のようになる.



■採点・配点　1. 2 点.

2. f の等高線 3 点, $\mathbf{V}$ の図 3 点, 直交していること 2 点.

■講評　まず等高線を描いて, 直交, 間隔からベクトル場を描くと楽だろうという出題意図だったが, 等高線が正しく描けている人は少なかった. ちょうど 2 乗の形になってるから簡単だと思ったんだけど. 線形代数の 2 次曲線の標準形では直線になるケースやった?

10

1. 渦なし条件を満たすので保存的である.
2. ポテンシャルは $f(\mathbf{r}) = 2x^3y^3 + 3x^2y^4 + 3y^2$. 実際, $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{V}$ となっている.

■採点・配点　1. 2 点.

2. ポテンシャル 8 点.

■講評　霊感は使っていいし, 効率から行ったらそれを勧めるくらいだけど, その場合は最後に, ‘この f の $\boldsymbol{\nabla} f$ を計算すると問題の $\mathbf{V}$ に一致する. だからこれが解’ と書かないと証明が完結しない. 微分方程式の霊感解法と同じだって言ったでしょ.

■**連絡**

- 来週 2011-06-15 水 1 は Quiz を行いません
- 来週 2011-06-14 火が締切である予習復習問題はありません

http://hig3.net