

## ベクトル解析Ⅱファイナルトリアル

樋口さぶろお\*<sup>1</sup> 配布: 2011-08-03 Wed 更新: Time-stamp: "2011-08-07 Sun 14:53 JST hig"

### ファイナルトリアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

空間の曲線  $C: \mathbf{r}(t) = (1, 2t, 3t^2)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) を考える. ただし始点  $(1, 0, 0)$ , 終点  $(1, 2, 3)$  とする. ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (z, x, 0)$  の  $C$  に沿った線積分  $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよう.

2

ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2x^2y, 2x)$  の, 曲線  $C: \mathbf{r}(t) = (t^2, -3t)$  ( $-2 \leq t \leq 0$ ) に沿った  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  の線積分 (マーク 2)  $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$  を求めよう. ただし,  $\mathbf{n}$  は  $C$  の単位法線ベクトルで,  $y$  成分が正であるものとする.

3

$xy$  平面上の閉曲線  $C$  を,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$  を 3 頂点とする三角形  $D$  の周とする. 向きはこの順 (反時計回り) とする.

ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x^2y^2 + 2x, y^4 + 2y)$  の,  $C$  に沿って線積分  $I = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$  を考える. 線積分  $I$  を, グリーンの定理を利用して面積分を書き直して求めよう.

4

3次元のベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x, -x + z, -y + z)$  を考える.

1. ベクトル場  $\mathbf{V}$  は保存的か. 理由とともに答えよう.
2. ベクトル場  $\mathbf{V}$  の発散を求めよう.

---

\*<sup>1</sup> Copyright ©2011 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館 5階 502

5

ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (y + 1, x)$  の, 平面の曲線  $C: \mathbf{r}(t) = (\cos^5 t, \sin^2 t \cos^3 t)$  ( $0 \leq t \leq \pi$ )  
ただし始点  $(1, 0)$ , 終点  $(-1, 0)$ , に沿った沿った線積分  $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよう.

6

$xy$  平面上の閉曲線  $C$  を, 原点を中心とする半径 2 の円周とする.

ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (xy + \cos(y^2), e^x + 2y)$  の, 閉曲線  $C$  に沿った  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  の線積分 (マーク  
2)  $I = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$  を考える. ただし,  $\mathbf{n}$  は  $C$  の内向き (原点向き) 単位法線ベクトルである.  
線積分 (マーク 2)  $I$  を, ガウスの発散定理を利用して面積分に変換して求めよう.

7

曲面  $S: z = x^3 + xy + \cos y$  とその上の点  $\mathbf{r}_0 = (-1, 0, 0)$  を考える.

1.  $S$  の  $\mathbf{r}_0$  における法線ベクトルをひとつ求めよう.
2.  $S$  の  $\mathbf{r}_0$  における接平面の方程式を求めよう.

8

ベクトル場  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (-z^2, 0, 0)$  と, パラメタ表示された曲面  $S: \mathbf{r}(s, t) = (s + 3t^2, s, t)$   
( $0 \leq s \leq 3, 0 \leq t \leq 2$ ) を考える.

$S$  の面積分  $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  を求めよう. ただし,  $\mathbf{n}$  は,  $x$  成分が負であるような, 曲面の単位  
法線ベクトル.

9

パラメタ表示された曲面  $S: \mathbf{r}(s, t) = (s + 3t^2, s, t)$  とその上の点  $\mathbf{r}_0 = (5, 2, 1)$  を考える.  
 $S$  の  $\mathbf{r}_0$  における接平面のパラメタ表示を求めよう.

10

パラメタ表示された曲面  $S: \mathbf{r}(s, t) = (2t \cos s, t \sin s, -t \sin s)$  ( $0 \leq s \leq 2\pi, -3 \leq t \leq$   
 $-1$ ) を考える.  $S$  の面積を求めよう.

## ベクトル解析Ⅱファイナルトリアル略解

樋口さぶろお\*2 配布: 2011-08-03 Wed 更新: Time-stamp: "2011-08-07 Sun 14:53 JST hig"

1

2.

■採点・配点 計算方法:6 点, 結果:4 点.

■講評 ストレートな問だが, 3次元に慣れてなかった人がいた(?)のは残念.

2

法線ベクトルは  $\mathbf{N} = \pm(-(-3), 2t)$ .  $y$  成分についての条件と  $t$  の範囲から,  $\mathbf{N} = -(3, 2t)$ .  
よって,

$$\int_{-2}^0 (-6t^5, 2t^2) \cdot (-3, -2t) dt = -176.$$

■採点・配点  $\pm\mathbf{N}$ :3 点,  $\mathbf{N}$  の向き:2 点, 線積分の方法:3 点, 結果:2 点.

■講評 プチテスト後すぐにやった, シンプルでアルゴリズムのはっきりした計算なんだからもう少しできてほしかったな~唯一(無意味に)複雑な定積分がある問だが, そこで間違えた人は少なかったし, たいして減点してない.

3

$(\nabla \times \mathbf{V})_z = 0 - 2x^2y$  なので, グリーンの定理より,

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{V})_z dS = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy (-2x^2y) = -\frac{4}{5}$$

この場合の反時計回りは, 領域を進行方向左側に見る普通の向き.

■採点・配点 渦度:3 点, 積分範囲を含む面積分の式:4 点, 2重積分の計算:3 点

■講評 三角形領域の面積分の式は書けるようになるうよ~去年やった内容だし, quiz とかで何度も復習したでしょ~

---

\*2 Copyright ©2011 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館5階502.

4

1.  $\nabla \times \mathbf{V} = (-2, 0, 1) \neq \mathbf{0}$ . であって渦なし条件が成立しない. よって保存的ではない.
2.  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 1 + 0 + 1 = 2$ .

■Remark  $\nabla \times \mathbf{V}$  に 1 個でも non-zero な成分が出てきたら, そこで非保存的であることがわかるので, 終了していい.

■採点・配点 保存的:5 点, 発散:5 点

■講評 3次元の保存場の条件がわかってない人が結構いました. 2次元のやつにさらに条件が2個付け加わるから, どれか1個でもだめだったら非保存的なんだよね～

5

スカラー場  $f(\mathbf{r}) = xy + x$  を考えると,  $\nabla f = \mathbf{V}$  となっており,  $\mathbf{V}$  は保存的で,  $f$  はそのポテンシャル. よって,  $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = f(-1, 0) - f(1, 0) = -2$ .

■採点・配点 保存的であること:3 点, ポテンシャル  $f$  を使った書き換え:2 点,  $f$  の形:2 点, 結果:3 点.

■講評 上で保存的か, みたいな問題があるし, こんな複雑な式なんだから, 楽に計算する方法を探してみてもほしかったな～

6

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = y + 2.$$

原点を中心とする半径 2 の円板を  $D$  とすると,  $\partial D = C$ .  $\mathbf{n}$  が内向きであることに注意して,

$$I = \int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds = - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{V}) \, dS = - \int_D (y + 2) \, dS$$

領域  $D$  が  $x$  軸に関して対称なので, '奇関数' $y$  に関する積分は 0 になる.

$$I = - \int_D 2 \, dS = -2 \times D \text{ の面積} = -8\pi.$$

■採点・配点 発散:3 点, ガウスの発散定理を使った面積分への書き換え:4 点, 面積分の計算と結果:3 点.

■講評 いちばん平均点の低かった問題.

面積分の計算は,  $x, y$  で  $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$  で2重積分した人が多く, 極座標に移った人が少数. それでも正しく計算できるけど, 落ち着いて考えれば円の面積の公式だけで答えがえられる.

7

1. 曲面の方程式は  $f(\mathbf{r}) = x^3 + xy + \cos y - z = 0$  とかける.  $\nabla f(\mathbf{r}) = (3x^2 + y, x - \sin y, -1)$ .  $\nabla f(\mathbf{r}_0) = (3, -1, -1)$ .
2. 接平面の方程式は  $(3, -1, -1) \cdot ((x, y, z) - (-1, 0, 0)) = 0$  すなわち,  $3x - y - z + 3 = 0$ .

■Remark パラメタ表示  $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, s^3 + st + \cos t)$  から求めることもできる.

■採点・配点 1:6点, 2:4点.

■講評  $\nabla f$  で法線ベクトルが求まるっていうのが実感できてない人が多かったのでしょうか.

$f$  を自分で作る, またはパラメタ表示を作るという追加の1ステップが必要だから難しかったのか.

$\frac{\partial z}{\partial x}$  などを計算したくなかった人もいた. ベクトル解析ではやってないが, 微積分Iを使うと, そちらから接平面の方程式を求めることもできる.

8

$$\mathbf{r}(s, t) = (-t^2, 0, 0).$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (1, 1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (6t, 0, 1).$$

$$\text{法線ベクトル } \mathbf{N} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \pm(1, \bullet, \bullet). \text{ 向き条件より, } \mathbf{N} = (-1, \bullet, \bullet).$$

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^3 ds \int_0^2 dt (-t^2, 0, 0) \cdot (-1, \bullet, \bullet) = 3 \int_0^2 dt t^2 = [t^3]_0^2 = 8.$$

■採点・配点 法線ベクトル:4点, 面積分の式:3点, 結果3点.

■講評 この問の平均点がいちばん高かった. 最終回くらいにやった内容で, '公式' でなんとかなる問題だから?

9

$$\mathbf{r}_{\text{接平面}}(s, t) = (5, 2, 1) + (1, 1, 0)(s - 2) + (6, 0, 1)(t - 1).$$

■採点・配点 10点

■講評  $s_0, t_0$  を求めるところで誤りが一定数あったのは残念.  $x_0, y_0$  とは限らないんですよ. パラメタ表示が  $(6t, 0, 1)t$  のように  $t$  の1次式になってないのは罪が重いです.

10

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (-2t \sin s, t \cos s, -t \cos s), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (2 \cos s, \sin s, -\sin s).$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (0, -2t, -2t)$$

$$t \text{ の範囲に注意すると, } \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| = 2\sqrt{2}|t| = -2\sqrt{2}t.$$

$$\int_S 1 \, dS = \int_0^{2\pi} ds \int_{-3}^{-1} dt 2\sqrt{2}|t| = 2\pi\sqrt{2}[-t^2]_{-3}^{-1} = 16\sqrt{2}\pi$$

■採点・配点 法線ベクトル:3点, 絶対値:2点, 面積分の式:3点, 結果:2点.

■講評 実は縦長に伸びた5円玉.

ヤコビアンを求めるところの三角関数の計算で間違った人がけっこういたのは残念.

$\sqrt{t^2} = |t|$  に惑わされた人が一定数いました.

どこからか  $\mathbf{V}$  を持ってきて ( $\mathbf{V} = \mathbf{r}$  とか)  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  を計算しようとした人がいましたが, それはちょっと罪が重いです.