曲線の接線と法線

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L01(2011-04-13 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-04-21 Thu 10:18 JST hig"

今日の目標

1. 曲線の単位接線ベクトルが求められる
2. 曲線の単位法線ベクトルが求められる
3. 曲線の接線, 法線のパラメタ表示が求められる

http://hig3.net

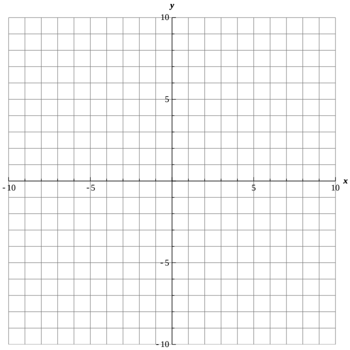
曲線の方程式表示

曲線の方程式表示

$$F(x, y) = 0$$

例

- 直線 $-x + y = 0$
- 放物線 $-x^2 + y = 0$
- 円 $x^2 + y^2 - 1 = 0$



方程式表示での曲線の平行移動，拡大縮小

曲線の平行移動，拡大縮小

曲線 $F(x,y)=0$ を，

- x 方向に c 倍，y 方向に d 倍拡大したあと
- x 方向に a，y 方向に b 平行移動すると

例

- 円 $x^2+y^2-1=0 \xrightarrow{\boxed{1,2\text{ 倍},3,4\text{ 移動}}}$

  .

- 放物線 $-x^2+y=0 \xrightarrow{\boxed{1,2\text{ 倍},3,4\text{ 移動}}}$

  $-\left(\frac{x-3}{1}\right)^2+\frac{y-4}{2}=0$ つまり $y=2(x-3)^2+4$.

曲線のパラメタ表示

$\mathbf{r}(t)$:パラメタ表示　t: $\boxed{\text{パラメタ (媒介変数)}}$

- $\mathbf{r}(t)$ は, 時刻 t における位置ベクトルだと思ってもよい.

位置ベクトル (物理数学 I)

例

$-3x + y = 0$ のパラメタ表示は, $(x(t), y(t)) = \boxed{}$. これを

$\mathbf{r}(t) = \boxed{}$ とかく.

ベクトルはこの授業では必ず $\mathbf{r}$ のように太字で書く. これに違反は重罪

パラメタ表示は一通りではない! $\mathbf{r}(t) = (t-10, 3(t-10)), (2t, 6t)$.

パラメタ表示を方程式表示に戻すには?

$\boxed{}$

パラメタ表示された曲線の拡大縮小, 平行移動

パラメタ表示された曲線の拡大縮小, 平行移動

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t))$ を, c, d 倍拡大したあと a, b 平行移動すると

$$\left(\frac{x(t)-a}{c}, \frac{y(t)-b}{d}\right) = (f(t), g(t))$$

つまり

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (c \cdot f(t) + a, d \cdot g(t) + b).$$

例

直線 $\mathbf{r}(t) = (t, 3t)$. $-\boxed{1, 2 \text{ 倍}, 3, 4 \text{ 移動}} \rightsquigarrow$
$\mathbf{r}(t) = (1 \cdot t + 3, 2 \cdot 3t + 4) = (1, 6)t + (3, 4)$
意味 $\mathbf{B} = (3, 4)$ を通り, $\mathbf{A} = (1, 6)$ に平行な直線.

直線と線分のパラメタ表示

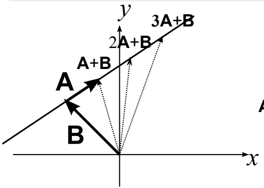
直線のパラメタ表示

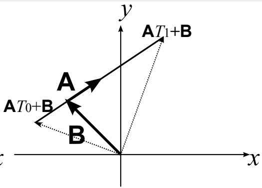
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}.$$

線分のパラメタ表示

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \qquad (T_0 \le t \le T_1)$$

両端は $\mathbf{r}(T_0) = \mathbf{A}T_0 + \mathbf{B}, \mathbf{r}(T_1) = \mathbf{A}T_1 + \mathbf{B}$.





パラメタ表示を作るには?

図で考える

方程式表示から $F(x, y) = 0$ —$\boxed{\text{解く}}$ $\rightsquigarrow y = G(x) \rightsquigarrow \mathbf{r}(t) = (t, G(t))$.

例

放物線 $-2x^2 + y = 0 \rightsquigarrow y = 2x^2 \rightsquigarrow \mathbf{r}(t) = (t, 2t^2)$.

円 $x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2} \rightsquigarrow \mathbf{r}(t) = (t, \pm\sqrt{9 - t^2})$? やだよ〜

職人芸的パラメタ表示はおぼえておく

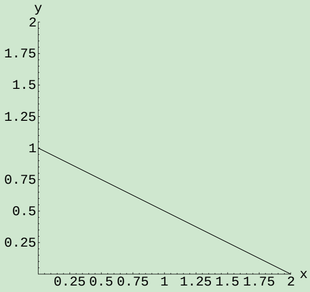
原点を中心とする半径 3 の円 $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t)\ (0 \le t \le 2\pi)$

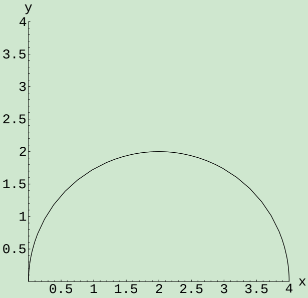
等速円運動 (物理数学 I)

例題

問題 (曲線のパラメタ表示)

1. パラメタ表示された線分 $\mathbf{r}(t) = (-2, 3)t + (4, 1)$ $(-1 \leqq t \leqq 2)$ を描こう.
2. 図の線分をパラメタ表示しよう.
3. 図の半円をパラメタ表示しよう.



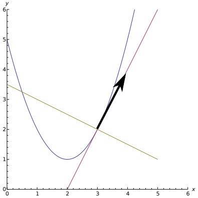


曲線の接線ベクトル

曲線 $\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における接線の向きは $\boxed{\text{接線ベクトル}}$ $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ で与えられる.

なぜ? $\mathbf{r}(t)$ が位置ベクトルなら $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ は速度ベクトル. 物理数学 I

例 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$ の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における接線ベクトルは?



曲線の接線のパラメタ表示

曲線の接線のパラメタ表示

$\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における接線のパラメタ表示は

$$\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) \cdot (t - t_0) + \mathbf{r}(t_0)$$

例

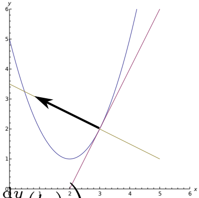
注意

- t を $t - t_0$ にしてもいいでしょ.
- そうするとテーラー展開を 1 次で打ち切ったみたいに見えるし.
- 放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ の接線の方程式と比べてみよう.

数学 II, 数学 III

曲線の法線ベクトル

曲線 $\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における法線の向きは, 接線ベクトル $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ を $\frac{\pi}{2}$ ラジアン回転させてえられる $\boxed{\text{法線ベクトル}}$ で与えられる.



$\frac{1}{2}\pi$ の回転行列

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \sin\frac{1}{2}\pi & -\cos\frac{1}{2}\pi \\ \cos\frac{1}{2}\pi & \sin\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここだけ縦ベクトルだと思ってね.

$$\text{法線ベクトル} = R_{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ +\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) \end{pmatrix}$$

例

曲線の法線のパラメタ表示

曲線の接線のパラメタ表示

$\mathbf{r}(t)$ の，$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における法線のパラメタ表示は

$$\mathbf{r}_{\text{法線}}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B} = \left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) \cdot (t - t_0) + \mathbf{r}(t_0)$$

例

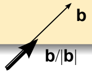
注意

- 方程式表示での接線．垂直なら傾きの積が -1

単位接線ベクトル, 単位法線ベクトル

単位ベクトル

$\mathbf{A}$ の長さが 1 ($|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 1$) のとき, $\mathbf{A}$ を単位ベクトルという.
$\mathbf{B}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$.



接線ベクトルが $\mathbf{T}$ なら, $\boxed{\text{単位接線ベクトル}}$ は $\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}$.

法線ベクトルが $\mathbf{N}$ なら, $\boxed{\text{単位法線ベクトル}}$ は $\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$.

例

(単位) 法線/接線ベクトルは, -1 倍してもよい.

問題 (曲線の単位接線ベクトル)

曲線 $\mathbf{r}(t) = (-t^2, t)$ を考える.

1. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における接線ベクトル, 単位接線ベクトルを求めよう.
2. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.

問題 (曲線の接線ベクトル法線ベクトル)

1. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (-t^2, t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (-4, -2)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.
2. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (-t^2, t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (-4, -2)$ における法線のパラメタ表示を求めよう.

教科書のお奨め問題

- ベクトル値関数の微分 $\boxed{\text{小高 問題 2.33–39}}$
- パラメタ表示, 接線ベクトル $\boxed{\text{小高 問題 2.41–44, 章末問題 [2.8]}}$
- 法線ベクトルは, 教科書では使ってるけどまとめて説明してはいない.

予習復習問題をやろう! 来週の朝の quiz では似た問題やります．プチテスト, ファイナルトライアルの一定部分はこれと対応する問題です.