

スカラー場と線積分

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

ベクトル解析Ⅶ L03(2011-04-27 Wed)

更新:Time-stamp: "2011-04-27 Wed 11:43 JST hig"

今日の目標

- ① スカラー場の絵が描ける
- ② スカラー場とペンギンの気持ちについての文章題に答えられる
- ③ スカラー場の曲線上の線積分が計算できる



<http://hig3.net>

略解 (曲線の単位接線ベクトル)

- ① $\mathbf{r}(t_0) = (-4, -2)$ を解くと $t_0 = -2$. 接線ベクトルは
 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = (-2t_0, 1) = (4, 1)$ 単位接線ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{17}}(4, 1)$

②

$$\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)(t - t_0) + \mathbf{r}(t_0) = (-4, 2) + (4, 1)(t + 2)$$

略解 (曲線の単位法線ベクトル)

- ① $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = (4, 1)$ を $\pi/2$ 回転すると, 法線ベクトルは $(-1, 4)$. 単位法線ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{17}}(-1, 4)$

②

$$\mathbf{r}_{\text{法線}}(t) = (-1, -4)t + (-4, -2)$$

スカラー場=2変数関数

スカラー場

2変数関数 $f(x, y)$ のことを **スカラー場** ともいう. $(x, y) = \mathbf{r}$ だから $f(x, y) = f(\mathbf{r})$ のように書く. 小高 §2.1(p.36)

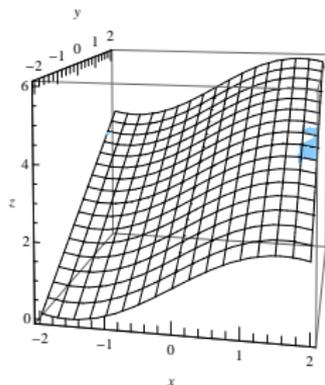
$z = f(\mathbf{r})$ は曲面

比較

- 曲面を表すスカラー場 $f(x, y)$ は2個の数を1個の数に. $(x, y) \mapsto z$
- 曲線を表す (パラメタ表示で)

ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ は1個の数を2個の数に. $t \mapsto (x, y)$.

先回りこの科目の主役の **ベクトル場** $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ は2個の数を2個の数に.



スカラー場の直観的意味

$\mathbf{r} = (x, y)$: 平面上の位置.

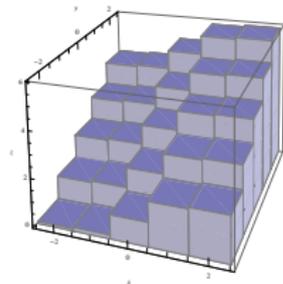
$\mathbf{r}(t)$: 時刻 t にアデリーペンギンのいる位置. 位置ベクトル.

$f(\mathbf{r})$; 位置 \mathbf{r} の

- 標高 (海面から測った高さ)



小高 p.37



問題

問題 (スカラー場の直観的な意味?)

次のうち、スカラー場でうまく表せないものはどれ(とどれ?)

- ① 標高 (海面から測った高さ)
- ② その日の降水量
- ③ 桜開花日
- ④ 放射能
- ⑤ 年間最高気温
- ⑥ 風向
- ⑦ 新快速通過時刻

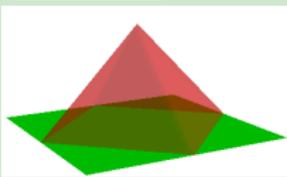
スカラー場の図

スカラー場の鳥瞰図

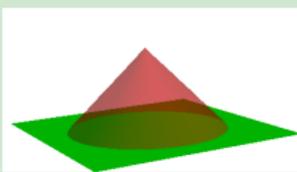
$$f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$$

の 鳥瞰図 はどれ?

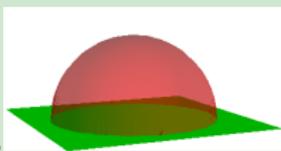
1.



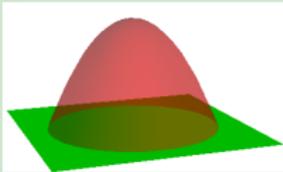
2.



3.



4.



鳥瞰図を想像してみよう

$f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2 = 10 - x^2 - y^2$ の3次元グラフ (鳥瞰図) を想像してみよう.

ローカルルール 格子点 (x, y) に, $f(x, y)$ を 1mm 単位で縦線で表す.



もっと強力な方法: 等位線 (等高線). もうちょっと後でやります.

断面図を描いてみよう!

$f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$ の断面図を描いてみよう.

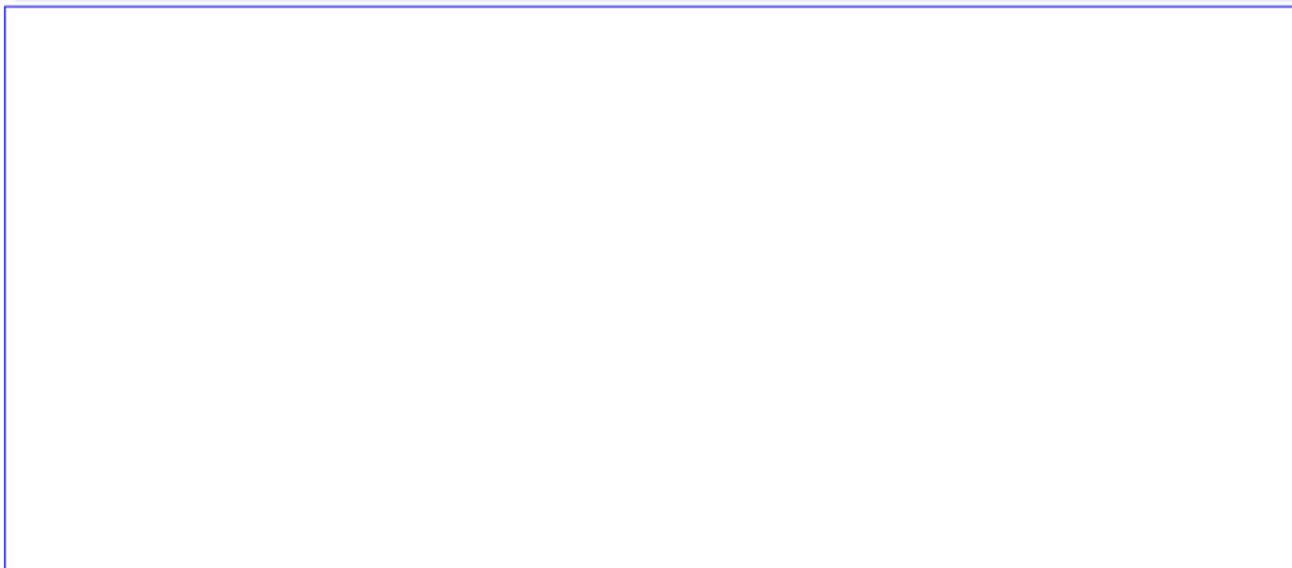
$\cdots z = f(x, -2) \quad z = f(x, -1) \quad z = f(x, 0) \quad z = f(x, 1) \quad z = f(x, 2) \cdots$



$z = f(a, y), a = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ も描ける.

問題 (スカラー場の3次元グラフ)

スカラー場 $f(\mathbf{r}) = x + y^2$ の3次元グラフを描こう. できれば, 等位線や断面図も描こう.



スカラー場と曲線の関係

位置 \mathbf{r} の温度を $f(\mathbf{r}) = y^2 + 3xy$ とする

アデリーペンギンの位置ベクトルを $\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$ とする.

アデリーペンギンが時刻 t に感じる温度は?

- ① $4t^2$
- ② $(3t, 4t^2 + 6t)$
- ③ $10t^2$
- ④ $(4t^2, 10t^2)$

問題 (スカラー場と位置ベクトル)

アデリーペンギンの住んでいる平野上の気温が $f(\mathbf{r}) = 3x + y^2 - 4y - 20$ で与えられる.

アデリーペンギンは位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = (2t^2, -3t)$ に従って行進した.
アデリーペンギンはいつどこで、何°Cの最低気温を経験したか答えよう.

スカラー場の曲線上の積分

スカラー場 $f(\mathbf{r})$ と、パラメタ表示 $\mathbf{r}(t)$ ($T_0 \leq t \leq T_1$) を持つ曲線 C に対して、

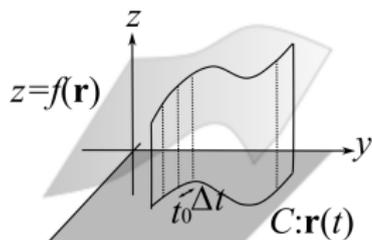
$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_{T_0}^{T_1} f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

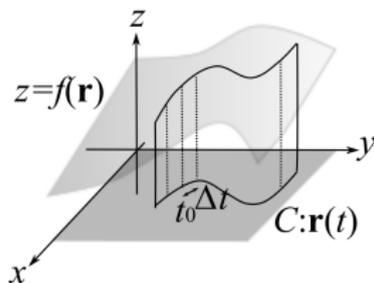
を、**スカラー場 f の曲線 C 上の線積分** という。 小高のってない

ds の s は線積分専用文字

スカラー場の線積分の意味

底が平面 $z = 0$, 表面が曲面 $z = f(\mathbf{r})$ であるようなケーキを、曲線 C に沿って切ったときの切り口の面積。なぜ?





- 面積は短冊 (長方形) の面積の合計
- 短冊 1 枚の $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right| \cdot \Delta t$.
- 短冊 1 枚の は $f(\mathbf{r}(t_0))$.

$$\text{切り口の面積} = \sum f(\mathbf{r}(t_0)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right| \cdot \Delta t \rightsquigarrow \int_{T_0}^{T_1} f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt$$

場合 1 $f(\mathbf{r}) = 1$ のとき,

$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_{T_0}^{T_1} 1 \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \text{曲線の長さ } L(\text{前回})$$

$f(\mathbf{r}) = h$ (定数) なら, 面積 = $h \times L =$ 丸めた長方形の紙の面積.

解釈 $f(\mathbf{r})$ を (ケーキの厚みでなく), その点での積雪の重さ, と思うと曲線上の雪の重さの合計.

比較面積分 (2重積分) $\int_S f(\mathbf{r}) \, dx dy$ は .

例 $z = 0$ と曲面 $f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$ にはさまれる立体の, 曲線 C , $\mathbf{r}(t) = (t, -2t)$ ($-1 \leq t \leq 1$) に沿った切り口の体積を求めよう.

問題 (スカラー場の線積分とケーキの切り口)

スカラー場 f は $f(\mathbf{r}) = y$ で定義される. 曲線 C は $\mathbf{r}(t) = (2 \cos 2t, 2 \sin 2t)$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) とパラメタ表示される.

- ① 曲線 C の長さを求めよう.
- ② 底が $z = 0$, 上の面が $z = f(\mathbf{r})$, $f(x, y) = y$ で与えられるケーキがあるとき, 曲線 C に沿ってケーキを切ったときの切り口の面積を求めよう.

連絡

大事な連絡

- 前回の Quiz は 6 点 $\times 2$.
- 来週の休日はふつうに授業なし
- 予習復習問題は再来週まで
- 再来週の平日はふつうに Quiz あり
- プチテストの日程を訂正. 2011-06-15~~08~~ 水 1 を予定.
- 数検をとろう!

教科書のお奨め問題

- 曲線の長さ 小高 問題 3.2-4, 章末問題 [3.3],[3.4]
- スカラー場 小高 問題 2.1-4, 章末問題 [2.1]