ポテンシャルの求め方

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L07(2011-06-01 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-06-02 Thu 09:44 JST hig"

今日の目標

1. ベクトル場が保存的であるかどうか判定できる
2. 保存場のポテンシャルを求められる
3. 保存的かそうでないかに応じてベクトル場を線積分できる

http://hig3.net

前回の黒板での Quiz 解答の訂正 ごめんなさい.
$\cdots = \int_0^3 44\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t = [11\mathrm{e}^{4t}]_0^3 = 11(\mathrm{e}^{12} - 1)$ でした.

略解 (スカラー場の勾配)

1. $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y^4, 4xy^3).$$
2. 保存場で, $\mathbf{V} = \nabla f$, $f(\mathbf{r}) = xy^4$ と書けるので,
$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(1,2) - f(3,1) = 1 \cdot 2^4 - 3 \cdot 1^4 = 13.$$

略解 (渦なし条件)

$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. 渦なし条件は成立しない. よって保存場ではない.

先週の復習

保存的

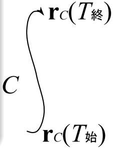
$\mathbf{V}$ に関する 3 つの条件はぜんぶ同じ (必要十分)

- ベクトル場 $\mathbf{V}$ が $\boxed{保存的}$ である. (保存場である)
- $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla} f$ となるようなスカラー場 f がある. つまり f の $\boxed{勾配}$ ベクトル場.
- $\boxed{渦なし条件}$ $\dfrac{\partial V_2}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1}{\partial y} = 0$ が成立する

勾配ベクトル場の線積分

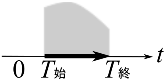
保存場の線積分は始点終点だけで決まり, C の形によらない. 小高 (6.21) §6.5

$$\int_C (\nabla f)\cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_C(T_{終})) - f(\mathbf{r}_C(T_{始}))$$



あれっどっかで見たことない?
1 変数関数 $f(t)$.

$$\int_{T_{始}}^{T_{終}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\, \mathrm{d}t =$$



ポテンシャル f の見つけ方 1

$\nabla f = \mathbf{V}$ のとき, f を $\mathbf{V}$ のポテンシャルというのだった.

問題 (保存場のポテンシャル)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 4xy, 2x^2 + 2y)$ を考える.

1. $\mathbf{V}$ が保存的であることを示そう.
2. ポテンシャル $f(\mathbf{r})$ を求めよう.
3. $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよう. ただし, C: $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $(0 \le t \le \pi)$. 始点 $\mathbf{r}(0)$, 終点 $\mathbf{r}(\pi)$.

- $\boxed{}$ を満たすので保存的.
- $\boxed{}$
- '実際, $\nabla f = \mathbf{V}$. よってこれが答'
- $\displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \boxed{}$.

ポテンシャル f の見つけ方 2

小高 載ってない

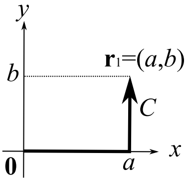
ポテンシャル f の見つけ方 3

保存場のポテンシャルの公式

保存場 $\mathbf{V}$ のポテンシャル $f(\mathbf{r})$ は次で求まる.

$$f(\mathbf{r}_1) = \int_C \mathbf{V} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

C は例えば右の図. 始点 $\mathbf{0}$, 終点 $\mathbf{r}_1 = (a, b)$ なら何でもいいが. 小高 問題 6.35(§6.5)



ちょっと変数名変更: 終点 $\mathbf{r}_1 \rightsquigarrow \mathbf{r}$. 積分変数 $\mathbf{r} \rightsquigarrow \mathbf{r}'$.

$$\boxed{\nabla \left(\int_C \mathbf{V}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}' \right) = \mathbf{V}(\mathbf{r})}$$

あれっどっかで見たことない? 1 変数関数の微積分学の基本定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int^t f(t') \, \mathrm{d}t' \right) = f(t)$$

問題 (線積分)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2xy^2 + 5x^4, 2x^2y + 4y)$ に対して, 曲線 C に沿った線積分 (マーク 1) を求めよう. ただし, 曲線
$C : \mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$. 始点が $(2, 0)$, 終点が $(0, 2)$.

問題 (線積分)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (1, 5xy - y^2)$ を考える.

1. このベクトル場は保存的かどうか答えよう. もし保存的であるなら, スカラーポテンシャル $f(\mathbf{r})$ を求めよう.
2. パラメタ表示された曲線 C, $\mathbf{r}(t) = (-t^3, 3t)$, $(0 \le t \le 1)$ を考える. ただし始点 $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, 終点 $\mathbf{r}(1) = (-1, 3)$ とする. 曲線 C に沿った, ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ を求めよう.

3 次元のスカラー場/ベクトル場と線積分と勾配

今までの話はぜんぶ $2 \to 3$ 次元 (x, y, z) にしても同様.

- 点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- 曲線のパラメタ表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(T_0 \leq t \leq T_1)$.
- スカラー場 $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$. 小高 §2.3
- ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$. 小高 §2.3
- ナブラ演算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. 小高 §7.1
- 勾配 $\nabla f(\mathbf{r}) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$. 小高 §7.1

違うところ.

- ポテンシャルの求め方: x, y, z で 3 回積分, または, L じゃなくてコ型折れ線に沿って線積分.
- 渦なし条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

まとめて, 外積で

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1, V_2, V_3) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\nabla} V \times \mathbf{V}$ を $\mathbf{V}$ の回転 (ベクトル場) という. 小高 p.157.
$\frac{\partial x}{\partial V_2} - \frac{\partial y}{\partial V_1}$ を $\mathbf{V}$ の渦度 (スカラー場) という. 小高 p.134. 回転ベクトル場の z 成分なので, $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V})_z$ ともかく.
渦度の 小高 のローカル記法 (授業では使わない): $[\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V}]$

連絡

大事な連絡

- 前回の Quiz は 12 点.

教科書のお奨め問題

- 保存的ベクトル場の線積分 $\boxed{\text{小高 問題 6.30(p.143),6.32(p.143)}}$
- 渦なし条件 $\boxed{\text{小高 問題 6.34(p.144), 章末問題 [6.5](p.149)}}$
- ポテンシャル f を見つける $\boxed{\text{小高 問題 6.37(p.146)}}$

プチテストやります!

- 2011-06-08 水 1. 90 分. 30 ピーナッツ. 参照なし. 公欠届.
- 過去問を参考にしすぎないこと. 似ているけどやってることは同じじゃない. 出題ののりは変える予定.
- これまでの quiz/問題が楽にできるようになっておくことがお奨め.

プチテスト出題計画

- 曲線のパラメタ表示を作ろう!(L01)
- パラメタ表示された曲線を描こう!(L01)
- (単位) 接線ベクトル, 接線のパラメタ表示を求めよう!(L02)
- (単位) 法線ベクトル, 法線のパラメタ表示を求めよう!(L02)
- スカラー場の曲線に沿った線積分=切り口の面積を計算しよう!(L04)
- 温度と風のある山を歩くアデリーペンギンの気持ちになろう!(L05)
- ベクトル場の曲線に沿った線積分を計算しよう=保存的でない場合!(L05)
- ベクトル場の曲線に沿った線積分を計算しよう=保存的な場合 (L07)
- スカラー場とベクトル場を描こう!(L03,L06)
- スカラー場の勾配を求めよう!(L06)
- ベクトル場のポテンシャルを求めよう (L07)

保存場 $\mathbf{V}$ の線積分の問題を, ポテンシャル f を求めることなく, 積分路 (曲線 C) を便利なものに変更することによって計算しよう.