曲面の接平面と法線

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L12(2011-07-13 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-07-13 Wed 06:42 JST hig"

今日の目標

1. 曲面の接線ベクトル, 法線ベクトルを求められる
2. 曲面の接平面のパラメタ表示を求められる
3. 曲面の接平面の方程式を求められる

http://hig3.net

略解 (3 次元曲線の接線)

$\mathbf{r}(t_0) = (-5, 0, \pi)$ を解くと, $t_0 = \pi$.

$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-5\sin t, 5\cos t, 1)$. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(\pi) = (0, -5, 1)$.

よって $\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = (-5, 0, \pi) + (0, -5, 1)(t - \pi)$.

略解 (方程式とパラメタ表示)

$$-2x - y + 2z = 4.$$

略解 (方程式とパラメタ表示)

$\mathbf{r}(s, t) = (s, t, 6 - 3s - 2t)$.

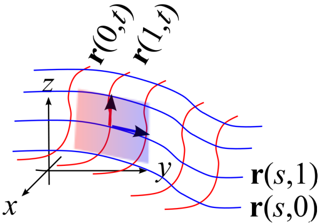
曲面の接平面

曲線 $\mathbf{r}_{t_0}(s) = \mathbf{r}(s, t_0)$ の $s = s_0$ における 接線ベクトル

曲線 $\mathbf{r}_{s_0}(t) = \mathbf{r}(s_0, t)$ の $t = t_0$ における 接線ベクトル

点 $\mathbf{r}(s_0, t_0)$ における $\boxed{\text{曲面の接線ベクトル}}$ は，この線形結合

$$\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0, t_0)\cdot a + \cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0, t_0)\cdot b$$



平面 $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}s + \mathbf{C}t$ の，$\mathbf{r}(s_0, t_0)$

における接線ベクトルは

曲面の接平面のパラメタ表示

曲面 $\mathbf{r}(s,t)$ 上の点 $\mathbf{r}(s_0,t_0)$ における $\boxed{\text{接平面}}$ のパラメタ表示は,

$$\mathbf{r}_{\text{接平面}}(s,t) = \mathbf{r}(s_0,t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0,t_0)\cdot(s-s_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0,t_0)\cdot(t-t_0).$$

復習

2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b).$$

問題 (接平面)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t) = (s+2t, t+t^3, s^3+st)$ の,
$\mathbf{r}(1,2) = (5,10,3)$ における接平面のパラメタ表示を求めよう.

問題 (曲面の接平面の性質)

次のうち, 曲面の接平面についてうそはどれ (複数回答可)?

1. 接平面と曲面の共通部分は 1 点だけである
2. 曲面上の各点で, 接平面は (存在するなら)1 個だけである
3. 曲面のパラメタ表示を変えても, 曲面が同じなら接平面は同じである
4. 接平面は xy 平面と平行である
5. 平面の接平面はそれ自身である

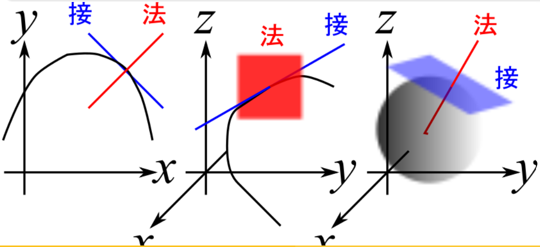
曲面の法線ベクトル

曲面の法線ベクトルの定義

(3 次元空間内の) 曲面 S と, その上の点 $\mathbf{r}_0$ を考える.
$\mathbf{r}_0$ における曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{N}$ とは, 点 $\mathbf{r}_0$ における S の接線ベクトルすべてに直交するベクトル. 小高 p.63

曲面とその接平面の法線ベクトル

(3 次元空間内の) 曲面 S と, その上の点 $\mathbf{r}_0$ における接平面 P を考える.
S の法線ベクトルは P にも直交.

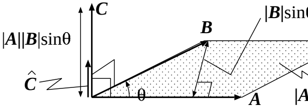


曲面の法線ベクトルの公式

曲面 S のパラメタ表示を $\mathbf{r}(s,t)$ とする.
点 $\mathbf{r}(s_0,t_0)$ における S の

1 つの法線ベクトル $\mathbf{N} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0,t_0) \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0,t_0)$

単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \pm \dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$



なぜなら:外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は

したものも法線ベクトル.

問題 (曲面の法線ベクトル)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t) = (s+2t, t+t^3, s^3+st)$ の,
$\mathbf{r}(1,2) = (5,10,3)$ における接平面の法線ベクトルを求めよう.

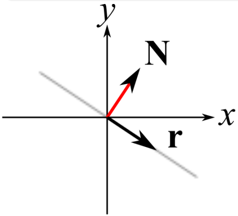
法線ベクトルを用いた接平面の方程式

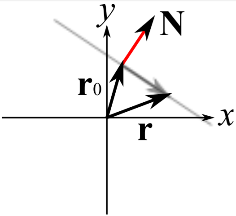
平面上の直線の方程式

$\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ に直交し, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ を通る直線の方程式は,

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

つまり　$(N_1, N_2) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$



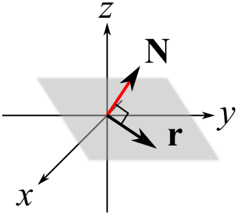


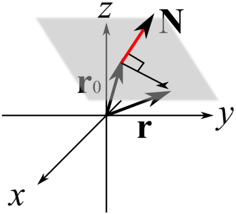
空間内の平面の方程式

3 次元で, $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ に直交し, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通る平面の方程式は

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$\text{つまり} \quad (N_1, N_2, N_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$



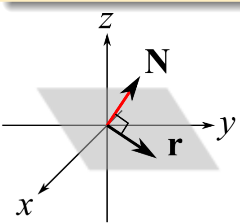


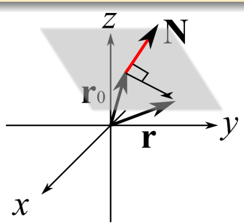
空間内の曲面の接平面の方程式

曲面 S : $\mathbf{r}(s,t)$ の $\mathbf{r}(s_0,t_0)$ における接平面の方程式 $f(\mathbf{r}_{接})=0$ は,
この点における法線ベクトル $\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0,t_0)\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0,t_0)$ を用いて,

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{r}_{接}-\mathbf{r}(s_0,t_0))=0$$

$$\text{つまり}\quad (N_1,N_2,N_3)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$





問題 (曲面の接平面の方程式)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t)=(s+2t,t+t^3,s^3+st)$ の,
$\mathbf{r}(1,2)=(5,10,3)$ における接平面の方程式を求めよう.

(復習)2 次元のスカラー場の等高線と勾配

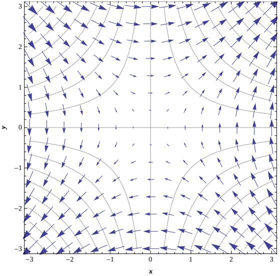
スカラー場の等高線 $f(\mathbf{r}) = C$ と, ∇f は直交.
スカラー場の等高線 $f(\mathbf{r}) = C$ の法線ベクトルと ∇f は平行.

3 次元のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ 小高 p.47

3 次元のナブラ演算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ 小高 §7.1

3 次元のベクトル場 小高 p.48

3 次元の勾配 $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$. 小高 §7.1



3 次元のスカラー場の等高面と勾配

スカラー場の等高面 $f(\mathbf{r}) = C$ と, ∇f は直交.
スカラー場の等高面 $f(\mathbf{r}) = C$ の法線ベクトルと ∇f は平行.

証明: 小高 問題 4.7

等高面を $\mathbf{r}(s,t)$ とする.

$$f(\mathbf{r}(s,t)) = C$$

両辺を s で微分. 多変数関数の合成関数の微分法.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

内積だと思うと,

t で偏微分しても同様. つまり ∇f と S の接線ベクトルとは直交する.

3 次元の保存場

3 次元のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が $\mathbf{V} = \nabla f$ と書けるとき, $\mathbf{V}$ は保存的であるといい, f を $\mathbf{V}$ のポテンシャルという.
保存的なベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して,

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t = f(\mathbf{r}(T_1)) - f(\mathbf{r}(T_0)).$$

小高 §7.5 **3 次元の渦なし条件**

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0}$$ 2 次元の渦なし条件

まとめて, 外積で

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1, V_2, V_3) = \mathbf{0}$$

$\nabla \times \mathbf{V}$ を $\mathbf{V}$ の回転 (ベクトル場) という. 小高 p.157.

問題 (曲面の接平面)

球面 $x^2+y^2+z^2=3$ の点 $(1,-1,-1)$ における接平面の方程式は?

問題 (曲面の法線ベクトルと接平面)

曲面 $\mathbf{r}(s,t)=(t\sin s, t\cos s, t^4)$ を考えよう. $(0\le s<2\pi, 0\le t<+\infty)$.

1. s,t を消去して x,y,z で書かれた方程式を求めよう. (*Hint.* $\sin^2 s+\cos^2 s=1$.)
2. 曲面上の点 $\mathbf{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ における 2 つの接線ベクトル $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi,2)$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi,2)$ を求めよう.
3. 曲面上の点 $\mathbf{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ における法線ベクトルを求めよう (**単位**法線ベクトルにはしなくてよい).
4. 曲面上の点 $\mathbf{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ における接平面をパラメタ表示しよう.
5. 曲面上の点 $\mathbf{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ における接平面の方程式を求めよう.

連絡

予習復習問題

- 大注意: 前々回から予習復習問題の締切を 1 日早めてます. 月曜 26:00=火曜 02:00 が締切. その後に正解をチェックしてから quiz に参加できるでしょ.

ファイナルトライアル計画

教務課の一覧表では持込不可と表示していますが, 外部記憶ペーパーを使用可能 (別紙). 来週以降に出題計画を公開.

教科書のお奨め問題

- 3 次元空間内の曲面の法線ベクトル 小高 問題 2.47(p.64)
- 3 次元空間内の曲面の接平面の方程式 小高 問題 2.48(p.64)
- 3 次元のスカラー場の勾配 小高 章末問題 [7.3]

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 10 ピーナッツゲット!

ベクトル解析∇の問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです.
$\boxed{\text{e ラーニングシステム}} \to \boxed{\text{ベクトル解析}\nabla} \to \boxed{\text{模範解答を作ろうプロジェクト!}}$
に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたものをフォーラムに返信してください.

自宅のスキャナや, 理工学部実習室 1-612(おすすめ) や, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室でスキャンできます.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

- 貢献に対して 1 問あたり最大 5 ピーナッツ, 1 人あたり最大 10 ピーナッツの加算があります.
- 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
- 最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価してピーナッツを決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 5 ピーナッツがその人々に分配されます.
- また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.
- 問題はときどき追加します. フォーラムの右側ブロックで, ‘このフォーラムをメール購読する’ を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知されます.