曲面上の面積分

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L13(2011-07-23 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-07-26 Tue 08:25 JST hig"

今日の目標

1. 3 次元のベクトル場が保存的かどうか判定できる.
2. 曲面上の f, $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ の面積分が計算できる.
3. 曲面の面積が計算できる.

http://hig3.net

p.4,5,7,10 の問題の解答: 省略
p.14 上の問題: 再出題予定
p.14 下

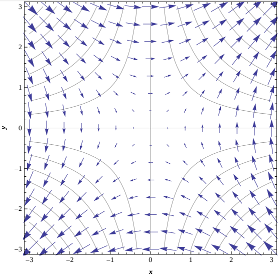
略解 (曲面の法線ベクトルと接平面)

1. $x^2 + y^2 = t^2$ より, $z = (x^2 + y^2)^2$.
2. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi, 2) = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi, 2) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 32)$.
3. $$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(-\tfrac{1}{3}\pi, 2) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(-\tfrac{1}{3}\pi, 2) = \pm(32\sqrt{3}, -32, 2)$$
   よって, $\mathbf{N} = (32\sqrt{3}, -32, 2)$ は法線ベクトル.
4. $\mathbf{r}_{接}(s, t) = (-\sqrt{3}, 1, 16) + (1, \sqrt{3}, 0)s + (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 32)t$.
5. $\mathbf{N} \cdot ((x, y, z) - \mathbf{r}(-\frac{1}{3}\pi, 2)) = 0$ より $32\sqrt{3}x - 32y + 2z + 96 = 0$.
   パラメタ表示から s, t を消去しても同じ方程式が得られる

曲面は 3 次元のスカラー場の等高面

(復習)2 次元のスカラー場の等高線と勾配

スカラー場の等高線である曲線 $f(\mathbf{r}) = C$ の法線ベクトルのひとつが $\mathbf{N} = \boldsymbol{\nabla} f$.



3 次元のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ 小高 p.48

3 次元のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ 小高 p.47

3 次元のナブラ演算子 $\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

小高 §7.1

3 次元の勾配 $\boldsymbol{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$. 小高 §7.1

3 次元のスカラー場の等高面と勾配

スカラー場の等高面である曲面 $f(\mathbf{r}) = C$ の法線ベクトルのひとつが $\mathbf{N} = \boldsymbol{\nabla} f$.

証明: 小高 問題 4.7

等高面を $\mathbf{r}(s,t)$ とする.

$$f(\mathbf{r}(s,t)) = C$$

両辺を s で微分. 多変数関数の合成関数の微分法.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

内積だと思うと,

t で偏微分しても同様.

つまり 勾配 ∇f と S の接線ベクトルとは直交する.

よって 勾配 ∇f は S の法線ベクトル.

方程式で与えられた曲面の法線ベクトルと接平面の求め方 2

問題 (曲面の接平面)

球面 $x^2+y^2+z^2=3$ の点 $(1,-1,-1)$ における接平面の方程式は?

3 次元の保存的なベクトル場

3 次元のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla} f$ と書けるとき, $\mathbf{V}$ は保存的であるといい, f を $\mathbf{V}$ のポテンシャルという.
保存的なベクトル場 $\mathbf{V}$ に対して,

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = f(\mathbf{r}(T_1)) - f(\mathbf{r}(T_0)).$$

小高 §7.5 **3 次元の渦なし条件**

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0} \cdots 2 \text{ 次元の渦なし条件}$$

まとめて, 外積で

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1, V_2, V_3) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}$ を $\mathbf{V}$ の回転 (ベクトル場) という. 小高 p.157.

問題 (3 次元の保存的ベクトル場)

3 次元のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}$ を考える.

1. $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が保存的であることを示そう.
2. $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ のポテンシャル $f(\mathbf{r})$ を線積分によって求めよう.

曲面上の面積分

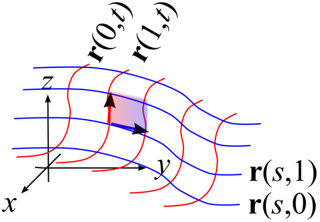
曲面 S のパラメタ表示 $\mathbf{r}(s,t)$ $(S_0 \le s \le S_1, T_0 \le t \le T_1)$. 小高 §4.3

曲面上のスカラー場の面積分の定義 (意味)

パラメタの値を $\Delta s, \Delta t$ ずつ変えて, 網目 (曲面上の座標) を描いたとする.

$$\int_S f \, \mathrm{d}S = \lim_{\text{細かく}} \sum_{i,j} f(\mathbf{r}(s_i, t_j))\Delta S_{ij}.$$

ここで, $\mathbf{r}(s_i, t_j)$: (i,j) 番目の平行四辺形の位置ベクトル, ΔS_{ij}: 面積.



曲面を接平面で近似すると, 平行四辺形の 2 辺のベクトルは,
$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_i, t_j)\Delta s$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_i, t_j)\Delta t$.

平行四辺形の面積は, 2 辺のベクトルの

$$\Delta S_{ij} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_i, t_j)\Delta s \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_i, t_j)\Delta t\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| \Delta s\, \Delta t$$

曲面上のスカラー場の面積分の公式

$$\int_S f \, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; f(\mathbf{r}(s,t)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right|$$

小高 p.98

特に $f(\mathbf{r}) = 1$ のとき,

曲面の面積の公式

$$\int_S 1 \, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right|$$

小高 p.95

問題 (曲面の面積)

曲面 S は $\mathbf{r}(s,t) = (t\cos s, t\sin s, 3)$ $(0 \leq s < 2\pi, 1 \leq t \leq 3)$ とパラメタ表示される．曲面 S の面積を求めよう．

この場合　　　　　　　　　　に対応.

$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right|$ は　　　　　　　　　　.

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

は ‘曲面上の積分の特別な場合.’

特に $f(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ のとき，

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$
$$= \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; \mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right|} \; \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right|$$

曲面上の $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分の公式

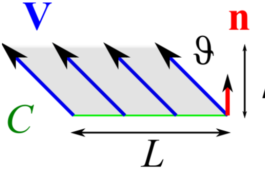
$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; \mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right)$$

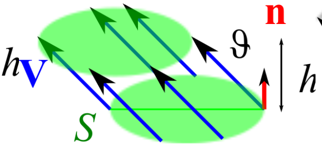
小高 p.99

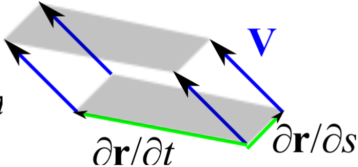
曲面上の面積分 $\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ の意味

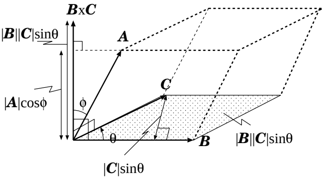
解釈 1: $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ の面積分は, $\mathbf{V}$ が水の流れだとしたときに, $\mathbf{V}$ が $\mathbf{n}$ の向きに S を通過する量.
解釈 2: $\mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t))\cdot(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}(s,t))$ は面を通過する平行六面体の体積.

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ は, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ のはる平行六面体の体積. 縦ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ を並べて書いた 3×3 行列の行列式に等しい.









問題 (曲面上の面積分)

曲面 S のパラメタ表示を,

$$\mathbf{r}(s,t) = (-2t, t\cos s, t\sin s) \qquad (0 \le s < 2\pi, 1 \le t \le 3)$$

とする. また, ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 3y, 0)$ を考える.

1. 曲面 S の面積を求めよう.
2. 面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ を求めよう. ただし, 曲面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は x 成分が負である向き.
3. 暇と興味のある人は S の形を妄想して描いてみよう.

連絡

予習復習問題

- 今回, 次回の予習復習問題の締切は 2011-08-01 月夜
- でも, 2011-07-27 水 1 の quiz は, この予習復習問題と似たのり

模範解答を作ろうプロジェクト!

で最大 10 ピーナッツゲット!

教科書のお奨め問題

- 3 次元のスカラー場の勾配 小高 章末問題 [7.3]
- 曲面上の面積分 小高 問題 4.11(p.98),4.12(p.99), 章末問題 [4.6](p.105),[4.7](p.105)
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分 小高 問題 4.15(p.103), 章末問題 [4.7](4)(p.105), [4.8](p.106)

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパーを使用可能 (別紙).
2011-07-27 水 1 に更新し確定します.

- ベクトル場の線積分マーク 1(再出題)
- ベクトル場の線積分マーク 2
- ガウスの発散定理
- グリーンの定理
- ベクトル場スカラー場と ∇
- 曲面の接平面
- 曲面の法線ベクトル
- 曲面の面積
- 曲面上の $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分
- ...