

マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L11(2026-06-29 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-05 Sun 19:41 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を計算できる
- マルコフ連鎖の定常分布，極限分布を説明できる



L10-Q1

Quiz 解答: マルコフ連鎖の推移確率行列

- ① 略
- ② 12×12 行列

$$M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 7 \\ 7 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 7 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L10-Q2

Quiz 解答: マルコフ連鎖の時間発展

- ① $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ② 転置推移確率行列 M の固有値 1 の固有ベクトル $\vec{u}$ を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u} = \vec{u}$ を解いて, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$). 定常分布は, 規格化された $\vec{u} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- ③ 転置推移確率行列 M の固有値 (絶対値の大きさの順に) λ_1, λ_2 , 対応する固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ を求めると,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0).$$

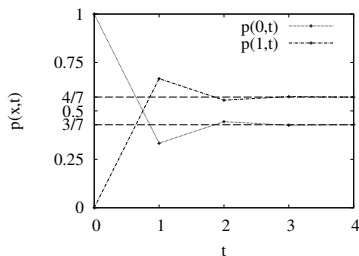
固有方程式には解 $\lambda_1 = 1$ があることが最初からわかってるから, 因数分解は楽.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とも $s = 1$ に固定する (他の取り方をしても最終的には同じ $\vec{p}(t)$ が求まる). このとき, $\vec{p}(0) = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ で係数 a, b を決めると, $a = \frac{1}{7}, b = \frac{4}{7}$.

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= M^t \vec{p}(0) \\ &= M^t (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \\ &= \lambda_1^t a\vec{u}_1 + \lambda_2^t b\vec{u}_2 \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t.\end{aligned}$$

$\vec{u}_1$ の係数が $\frac{1}{7}$ である (=この項が確率ベクトルである) ので, $t \rightarrow +\infty$ でも $\vec{p}(t)$ が確率ベクトルでありつづけることが確認できる. (固有値が $\lambda = 1, -\frac{1}{6}$ となった時点で, 第 1 項が確率ベクトルになるはず, ということから, 1 次方程式を解かずに $a = \frac{1}{7}$ と決められたはずだった).

時間変化. $|\lambda_2| = \frac{1}{6} < 1$ なので, $\vec{p}(t) \rightarrow \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \rightarrow +\infty)$

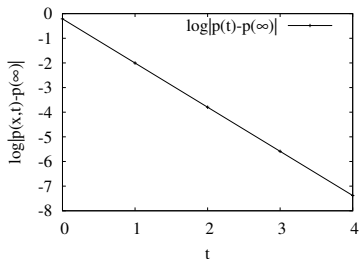


- ④ 極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ との差の大きさ (ベクトルの長さ) を考えると,

$$\begin{aligned} |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \left| \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t \right| \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^t \end{aligned}$$

$$\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| = t \times \log \frac{1}{6} + \log \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

よって, t 対 $\log |\text{差}|$ のグラフを描くと, 傾き $\log |\text{第2固有値}| (< 0)$ の直線になるはず.



状態空間が3点以上からなり、(第2固有値より絶対値が小さい)第3固有値以降がある場合も、 t が大きいところではこの直線に近づいていく。

さらに t を大きくすると、 $|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ が桁落ちしたり、数値的に0とみなされるなどで、直線から外れる。

5

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

L10-Q3

Quiz 解答: マルコフ連鎖の時間発展

- ① 定常分布は, 固有値 1 の固有ベクトルを定数倍して確率ベクトルにしたものなので, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

②

$$\vec{p}(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 1^t + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^t$$

で, 初期条件から $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$ である.

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^t$$

- ③ 上の結果で $t \rightarrow +\infty$ とすると, 定常状態 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に収束する.

ここまで来たよ

10 時系列モデルとしてのマルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

極限分布

定義 (マルコフ連鎖の極限分布)

転置推移確率行列 M と初期分布 $\vec{p}(0)$ の定めるマルコフ連鎖 $\vec{p}(t)$ に対して， $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t) =: \vec{p}(\infty)$ が存在するとき，これを**極限分布**という．

意味 **自分の言葉でどうぞ**

L11-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$, $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

- ① 定常分布をすべて求めよう.
- ② 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 上のとき, $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を $t \rightarrow +\infty$ で 1 次関数で近似しよう.

単純な場合でのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.

転置推移確率行列 M の固有値固有ベクトル $\lambda_i, \vec{u}_i$ ($i = 1, \dots, m$).

仮定

絶対値の大きさの順に並べると (第 1, 第 2, ..., 第 m 固有値とよぶ) 次のようになっているとする.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

このとき, $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとれて, 解は,

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \dots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \cdots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

この単純な場合の性質

- 第1固有値は1. 転置推移確率行列の固有値には, いつでも1が含まれることを示したのだった.

先週の証明

- 第1固有ベクトル $\vec{u}_1$ は 定常分布.

ペロン-フロベニウスの定理

- 極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$. 自分の言葉でどうぞ

ちなみに, 極限分布が存在するなら, それは必ず定常分布. なぜなら
自分の言葉でどうぞ

この単純な場合の性質の続き

- 第2以降の固有値の絶対値が1より小なので **自分の言葉でどうぞ**
第2固有値の絶対値の小ささが，極限分布への収束の速さを決める
- 第2以降の固有ベクトルは **自分の言葉でどうぞ**

これは単純な場合で，一般にはそうでない場合もある

- 単純である＝**既約** (可約でない) かつ **非周期的**
- 単純でない一般的な場合＝**可約** または **周期的**

ここまで来たよ

10 時系列モデルとしてのマルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 1: 可約なマルコフ連鎖 I

L11-Q2

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- ① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$ (重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも，確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき，マルコフ連鎖は (推移確率行列は) **既約** であるという．既約でないとき，**可約** であるという．可約なとき，複数の定常分布が存在する．極限分布は初期分布に依存する．

可約なマルコフ連鎖は，既約なマルコフ連鎖に‘分割して’考察すればよい．

ここまで来たよ

10 時系列モデルとしてのマルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合：可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合：周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 2: 周期的なマルコフ連鎖 I

L11-Q3

Quiz(周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 定常分布をすべて求めよう.
- 2 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
- 3 推移図を描こう.

Hint: 固有値 $\lambda_j = \omega^j = (\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^j$ ($j = 0, 1, 2$) 固有ベクトル

$$u_j = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s$$

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態. **周期的**な状態があると, 絶対値 1 の固有値が複数ある. このとき, 初期分布によっては極限分布がないことがある.

既約なマルコフ連鎖について, 周期的な状態を持つものを周期的なマルコフ連鎖という

- 単純な場合 = **既約** (可約でない) かつ **非周期的**

一般の場合 **可約** または **周期的**

L11-Q4

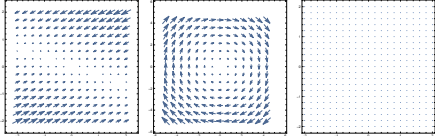
Quiz(周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常状態と時間発展)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ❶ マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
- ❷ $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
- ❸ $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系	数理モデル II	マルコフ連鎖	計算科学
$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$		$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$	
		$\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M - E)\vec{p}(t-1)$	
$\vec{p}(t) = e^{At}\vec{p}(0)$ $(e^A)^t$		$\vec{p}(t) = M^t\vec{p}(0)$	
		$(e^{M-E})^t \simeq (E + (M - E))^t = M^t.$	
A の固有値 θ の実部が 0 $\theta = a + bi$		M の固有値 $\lambda = e^\theta$ の絶対値が 1 $\lambda = e^\theta = e^{a+bi}$	
			「単純」, 周期的, 可約