

時系列の状態空間モデル

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L12(2026-07-06 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-06 Mon 17:16 JST hig"

今日の目標

- 確率過程の自己回帰移動平均モデル $\text{ARMA}(m, k)$ を説明できる.
- 時系列の状態空間モデルを説明できる



L11-Q1

TA Prob and Sol: マルコフ連鎖の定常分布と時間発展

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$, $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

- ① 定常分布をすべて求めよう.
- ② 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 上のとき, $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を $t \rightarrow +\infty$ で 1 次関数で近似しよう.

略解

- ① 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである確率ベクトルは $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみであり, これが唯一の定常分布

②

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

- ③ 式でまともに計算すると, 固有ベクトルの内積 $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$ とか出てきてたいへん, だけど, $t \rightarrow +\infty$ では, $\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)$ の第3項が(第2項と比べて)無視できて,

$$\begin{aligned} \log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \log \left| -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^t \right| + \text{もっと小さい項} \\ &= t \log \frac{3}{4} + \log \frac{\sqrt{2}}{6} + \text{もっと小さい項} \end{aligned}$$

となる.

L11-Q2

TA Prob and Sol: 可約なマルコフ連鎖の定常分布と時間発展

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- ① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 推移図を書こう.

略解

固有値 $\lambda = 1$ (重解) に対応する固有ベクトルは,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$ ($s \neq 0$ または $k \neq 0$). 固有値 1 なので, 線形独立な確率

ベクトルを 1 組選ぶと便利 (他の選び方でも最終的な結果は変わらない) で, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, $s\vec{u}_1 + (1-s)\vec{u}_2$ ($0 \leq s \leq 1$) は定常分布.

固有値 $\lambda = \frac{1}{3}$ に対する固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$). 確率ベクトルにはなりえないので, 適当に非零ベクトルをひとつ選んで (他の選び方でも最終的な結果は変わらない), $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{p}(0)$ が一般の場合の時間発展は

$$\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 1^t + c\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t.$$

① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{4}\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{3}\vec{u}_1 + \frac{2}{3}\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

- ③ $\{0\}$ と $\{1, 2\}$ が分かれた推移図. すなわち, 可約なマルコフ連鎖である.

導出

なお, 一般の $\vec{p}(t)$ の式は次のように導ける.

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= M^t \vec{p}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & \\ & \lambda_2^t & \\ & & \lambda_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}^{-1} \vec{p}(0) \end{aligned}$$

どうせ $\vec{p}(0)$ は一般なので $\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}^{-1} \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおいて

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \lambda_1^t & \vec{u}_2 \lambda_2^t & \vec{u}_3 \lambda_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a \vec{u}_1 \lambda_1^t + b \vec{u}_2 \lambda_2^t + c \vec{u}_3 \lambda_3^t. \end{aligned}$$

L11-Q3

TA Prob and Sol: 周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常分布と時間発展

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える．転置推移確率行列 M は次．

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① 定常分布をすべて求めよう．
- ② 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう．
- ③ 推移図を描こう．

略解

- ① 推移確率行列 T の固有値 λ , 固有ベクトルを求めると,

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0)$$

定常分布は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルで, 確率ベクトルになるように s を定めると, $\vec{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ② 他の固有値 $\lambda = \omega, \omega^2$ は, $|\omega| = |\omega^2| = 1$ を満たす. よって, 一般には極限分布は存在しない.

極限分布が存在するのは, $\vec{p}(0) = \vec{u}_1 = \vec{p}(t)$ のように最初から定常分布であったときに限られる.

- ③ 3 個の状態が 1 方向に回るような推移図.

L11-Q4

TA Prob and Sol: 周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常状態と時間発展

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ❶ マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
- ❷ $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
- ❸ $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

略解

- ① 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$).
 確率ベクトルになるように s を選んで, $\vec{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が定常分布.
 なお, 固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$).
 適当に s を選んで, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく,
 一般に $\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$.
- ② $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + \frac{1}{6}\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$. 振動するので極限分布は存在しない.
- ③ $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $a = 1, b = 0$ で $\vec{p}(t) = \vec{u}_1$. 極限分布は $\vec{p}(\infty) = \vec{u}_1$ であり定常分布.

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

12 時系列の状態空間モデル

- k 次の移動平均モデル $MA(k)$
- 状態空間モデル
- 状態空間モデルの例
- カルマンフィルタ

移動平均の定義

定義 (移動平均)

時系列 $\{X_t\}$.

k 次の後方移動平均 $Y_{t,k} = \frac{1}{k}(X_{t-k+1} + \cdots + X_{t-1} + X_t)$.

移動平均モデルの定義のアイデア

$$X_t = \phi_1 Y_{t-1,1} + \phi_2 Y_{t-1,2} + \cdots + \phi_k Y_{t-1,k} + \epsilon_t$$

としては?

漸化式を解いていくと, けっきょくすべて $\epsilon_{t'}$ ($t-k-1 \leq t' \leq t-1$) に帰着する.

k 次の移動平均モデル $MA(k)$

定義 (k 次の移動平均モデル $MA(k)$)

$t = 0, 1, 2, \dots$: 時刻

$\{\epsilon_t\}_{t=1, \dots}, \{X_t\}_{t=0, 1, \dots}$: 連続型確率変数の列

$\theta_k \in \mathbb{R}$: パラメタ

$X_t (t \geq 1)$ は次のように定まる.

$$X_t = \beta_0 + \theta_0 \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_k \epsilon_{t-k}. \quad (t \geq k)$$

ただし $\theta_0 = 1$. ϵ_t は次を満たす.

$$E[\epsilon_t] = 0 \quad (\text{WN1})$$

$$E[\epsilon_t \epsilon_s] = \sigma^2 \delta_{ts} \quad (\text{WN2})$$

$$E[X_t \epsilon_s] = 0 \quad (t < s) \quad (\text{PI})$$

移動平均モデル $MA(k)$ の母平均値・母自己共分散

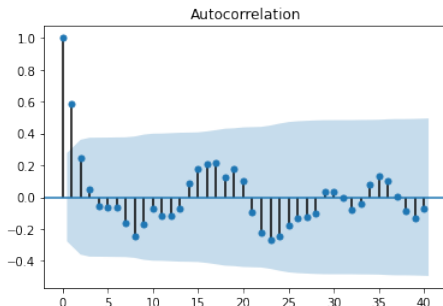
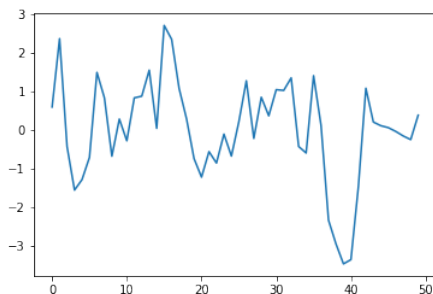
$$E[X_t] = \beta_0.$$

$$\begin{aligned} V[X_t] &= V[\beta_0 + \theta_0\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_k\epsilon_{t-k}] \\ &= \theta_0^2 V[\epsilon_t] + \theta_1^2 V[\epsilon_{t-1}] + \cdots + \theta_k^2 V[\epsilon_{t-k}] \\ &= (\theta_0^2 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_k^2) \sigma^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_t, X_{t-s}] &= E[(\beta_0 + \theta_0\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_k\epsilon_{t-k}) \\ &\quad \times (\beta_0 + \theta_0\epsilon_{t-s} + \theta_1\epsilon_{t-s-1} + \cdots + \theta_k\epsilon_{t-s-k})] - E[\beta_0 + \cdots] \\ &= \cdots \\ &= \begin{cases} 0 & (k < s) \\ (\theta_0\theta_s + \theta_1\theta_{s+1} + \cdots + \theta_{k-s}\theta_k)\sigma^2 & (k \geq s) \end{cases}. \end{aligned}$$

移動平均モデル $MA(k)$ のサンプルパスとコレログラム

$MA(1)$, $\theta_1 = 0.9$.



青網掛けは, Bartlett's formula による信頼区間. この外に出ると, 帰無仮説 $r = 0$ が有意水準 $\alpha = 0.05$ で棄却される.

L12-Q1

Quiz(移動平均モデル $MA(1)$ の例)

1 次の移動平均モデル $MA(1)$ モデルを考える (授業中に使った記号で).
 $\beta_0 = 0$ とする.

- ① 確率変数 X_2 を, ϵ_t, θ_1 で表そう.
- ② 母期待値 $E[X_2^2]$ を σ と θ_1 で表そう.
- ③ 母自己共分散 $\text{Cov}[X_2, X_3]$ を σ と θ_1 で表そう.
- ④ 母自己共分散 $\text{Cov}[X_2, X_4]$ を求めよう.

m, k 次の自己回帰移動平均モデル $ARMA(m, k)$

X_t の漸化式の右辺が, ϵ_t に加え, $AR(m)$ と $MA(k)$ の和であるモデル.

階差数列

時系列の階差を繰り返しとると, 定常になって, $ARMA$ で解析できることがある.

階差 difference $\leftrightarrow$ 和分 (離散和のこと) integrated

m, d, k 次の自己回帰和分移動平均モデル $ARIMA(m, d, k)$

d 階階差が $ARMA(m, k)$ にしたかう時系列, $ARMA$ を和分した時系列.

Code example for ARMA(2,2)

Listing 1: arma

```

1 from statsmodels.tsa.arima_process import ArmaProcess
2 ar=[1,-phi1,-phi2]          # 1は必ず含める マイナスをつける
3 ma=[1,theta1,theta2]        # [theta_0,theta_1,theta_2] 1は必ず
4 MA=ArmaProcess(ar,ma) # 自己回帰移動平均モデルを計算するオブジ
5 x=MA.generate_sample(nsample=50) # 時間の長さ=50

```

ar, ma は、漸化式の L のラグ多項式の係数のリスト.

定義 (ラグ演算子)

ラグ演算子 L を $LX_t = X_{t-1}$ で定める.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

$$(1 - \phi_1 L^1 - \phi_2 L^2)X_t = (1 + \theta_1 L^1 + \theta_2 L^2)\epsilon_t$$

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

12 時系列の状態空間モデル

- k 次の移動平均モデル $MA(k)$
- 状態空間モデル
- 状態空間モデルの例
- カルマンフィルタ

時系列の隠れた変数

琵琶湖の漁の毎年の漁獲量は時系列. 過去の漁獲量 (kg) のデータを見て, AR(2) っぽい, とか, ϕ_1, ϕ_2, σ^2 はいくつ? とか推定することはできる. し
か〜し.

- 実は背後に, 琵琶湖の生息するナマズの総数とか, モロコの総数とか, もっと言えば, 水温とか水草の量とか, 観測できない, より本質的な時系列があるのでは?
 - ▶ 被食者捕食者の増減の話とかやったよね?/やります. 微分方程式, 数理モデル
- ホワイトノイズ ϵ_t っていうけど, 今年はたまたま稚魚が育たなかったっていうノイズと, 今年はコロナで漁船の整備ができなかった(?) っていうノイズは別なのでは?

システムと観測を分けて, もっと精密に考えたい!

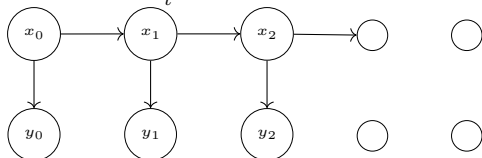
定義 (状態空間モデル (の簡単な場合))

- 観測できない量
 - ▶ $\mathbf{X}_t$: 状態ベクトル (2 次元「状態空間」の元)
 - ▶ $\mathbf{v}_t$: システムノイズベクトル (2 次元), 共分散行列 Σ
 - ▶ w_t : 観測ノイズ (1 次元) $V[w_t] = \sigma_w^2$.
 $\mathbf{v}_t, w_t$ は互いに独立なホワイトノイズ
- 観測できる量
 - ▶ Y_t : 観測値 (1 次元)
- 定数
 - ▶ F, G : 2×2 行列
 - ▶ H : 1×2 行列

システム (状態) モデル $\mathbf{X}_t = F\mathbf{X}_{t-1} + G\mathbf{v}_t$

観測モデル $Y_t = H\mathbf{X}_t + w_t$

状態空間 = $\mathbf{X}_t$ の観測できない空間



状態ベクトルは漸化式で計算される.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_t &= F\mathbf{X}_{t-1} + G\mathbf{v}_t \\ &= F(F\mathbf{X}_{t-2} + G\mathbf{v}_{t-1}) + G\mathbf{v}_{t-1} \\ &= \cdots = F^t\mathbf{X}_0 + \sum_{t'=0}^t F^{t-t'}G\mathbf{v}_{t'}\end{aligned}$$

観測値 Y_t は漸化式で結ばれておらず, 各時刻ごとに $\mathbf{X}_t$ から計算される.

$$Y_t = H\mathbf{X}_t + w_t.$$

パラメタ F, G, H , ノイズの共分散既知. データ $Y_{1:t}$ が与えられたときに, 状態 $X_{1:t}$ を推定したい.

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

12 時系列の状態空間モデル

- k 次の移動平均モデル $MA(k)$
- 状態空間モデル
- 状態空間モデルの例
- カルマンフィルタ

例: 琵琶湖の漁獲量

$$F = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.3 \\ -0.5 & 0.98 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} \text{なまずの個体数} \\ \text{モロコの個体数} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 100 & 200 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \text{正規分布 (水草の量)} \\ \text{正規分布 (水温)} \end{pmatrix}$$

$$Y_t = \text{漁獲量 (kg)}, H = \begin{pmatrix} 1000 & 10 \end{pmatrix}, w_t = \text{正規分布 (漁船の数)}$$

例:AR(m) を状態空間モデルとして表現

AR(2)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t.$$

は 2 次元の状態空間で表せる.

$$\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{正規ノイズ} \\ \text{正規ノイズ} \end{pmatrix},$$

$$Y_t = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + 0 \cdot \text{正規ノイズ}$$

AR(3) 3 次元の状態空間で表せる.

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \epsilon_t, \\ X_{t-1} &= 1 \cdot X_{t-1}, \\ X_{t-2} &= +1 \cdot X_{t-2}, \\ Y_t &= X_t + 0 \cdot \epsilon'_t \end{aligned}$$

例 1: 隠れマルコフモデル

HMM=Hidden Markov model 隠れマルコフモデルは, 状態空間ベクトル $\mathbf{X}_t$ を離散値にしたバージョン

- 「 $\mathbf{X}_t$ が離散型確率変数でマルコフ連鎖の場合」を考えたい. $X_t = 1, 2, \dots, n$.
- システムモデルは「 X_t が確率的に時間発展する」ことを表すので, マルコフ連鎖で書くのが自然. M は転置推移確率行列.

計算科学 B, 確率モデル及び実習

$$\vec{p}(t+1) = M\vec{p}(t), \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} P(X_t = 1) \\ P(X_t = 2) \\ \dots \end{pmatrix}$$

- 観測できない (隠れた) $X = 1, 2, \dots, n$ から 観測される Y_t の値は X から決まる.

例 2: ローカルレベルモデル (ランダムウォークプラスノイズモデル)

$$X_t = X_{t-1} + \text{乱数},$$

$$Y_t = X_t + \text{別の乱数}$$

ランダムウォークだが、観測者によるウォーカーの位置の測定値 Y_t は正確ではない。その前提で、正確な位置 X_t を求めたい。

定義 (直線上を歩く AirTag をつけた猫)

- 観測できない量
 - ▶ x_t : 猫の位置
 - ▶ $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$: 猫の気まぐれな移動
 - ▶ $w_t \sim N(0, \sigma^2)$: AirTag の誤差
- 観測できる量
 - ▶ y_t : AirTag の位置表示

$$\text{システム (状態) モデル } x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t$$

$$\text{観測モデル } y_t = H \cdot x_t + w_t$$

状態空間モデルの特徴

- パラメタが多い
- $AR(m)$ や親戚の MA, ARMA, ARIMA, SARIMA などのモデルを統一的に表せる.
- これでないと表せないモデルもある.
- 制御工学でよく扱われて、解法が整備されている. $Y_1, \dots, Y_t$ から状態推定する.
- 問題の分類
 - ▶ 平滑化 過去の状態 $X_{t'} (t' < t)$ を推定する
 - ▶ フィルタ 現在の状態 $X_{t'} (t' = t)$ を推定する
 - ▶ 予測 将来の状態 $X_{t'} (t' > t)$ を推定する
- 漸化式が線形で、ノイズが正規分布のとき、全ての分布は正規になる. この時、効率のよい解法カルマンフィルタがある

L12-Q2

Quiz(AR(4) の状態空間モデル)

4 次の自己回帰モデル AR(4) モデルを状態空間モデルとして考える (授業の記号で).

- ① 状態ベクトルを書こう.
- ② システムモデル, 観測モデルに現れる行列の, F, G, H を書こう.

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の定常分布・極限分布，周期的・可約

12 時系列の状態空間モデル

- k 次の移動平均モデル $MA(k)$
- 状態空間モデル
- 状態空間モデルの例
- カルマンフィルタ

カルマンフィルタ

- 状態空間モデルで、パラメタ $F, G, \sigma_v^2, \sigma^2$ を既知として、観測された $Y_1, \dots, Y_t$ から、状態 $X_{t'}$ を推定する方法.
 - ▶ 平滑化 $t' < t$
 - ▶ フィルタ $t' = t$
 - ▶ 予測 $t' > t$
- 雑音として、正規ホワイトノイズを仮定: $v_t \sim N(0, \sigma_v^2 E)$
 $w_t \sim N(0, \sigma^2).$
- 計算時間が少ない、消費メモリーが少ない
- オンラインなアルゴリズム ($\leftrightarrow$ バッチなアルゴリズム)
 - ▶ $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ からの推測結果を持っているところに、データ Y_t が追加されたとき、全てのデータからの計算し直しではなく、現在の推測結果からの (少ない計算での) 修正が行える.
- Python library pykalman <https://pykalman.github.io/>
- カルマンフィルタを備える、状態空間モデルのライブラリ
<https://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.statespace.structural.UnobservedComponents.html>

相手にする分布

状態の周辺事後分布

$$f(x_{t'}|y_{1:t}) \stackrel{\text{略記}}{=} (t'|t)$$

- $y_{1:t}$ は $(y_1, \dots, y_t)$ の略記.
- 周辺と言う名は t' 以外の $x_{t''}$ について周辺化した (和を取った) から.

分布の間の漸化式

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$y_{1:0} = \emptyset$	(0 0)	(1 0)	(2 0)	(3 0)	(4 0)
$y_{1:1}$	(0 1)	(1 1)	(2 1)	(3 1)	(4 1)
$y_{1:2}$	(0 2)	(1 2)	(2 2)	(3 2)	(4 2)
$y_{1:3}$	(0 3)	(1 3)	(2 3)	(3 3)	(4 3)
$y_{1:4}$	(0 4)	(1 4)	(2 4)	(3 4)	(4 4)

単純化：ローカルレベルモデル

ノイズが正規分布なので、(事前分布が正規なら) 次の分布はすべて正規分布になる。

正規分布の加法性

$$\text{略記 } f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} (x - \mu)^2}.$$

$$\text{フィルタ分布 } f(x_t | y_{1:t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot C_t}} e^{-\frac{1}{2 \cdot C_t} (x_t - m_t)^2}$$

$$\text{一期先予測分布 } f(x_t | y_{1:t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \hat{C}_t}} e^{-\frac{1}{2 \cdot \hat{C}_t} (x_t - \hat{m}_t)^2}$$

一期先予測尤度 $f(y_t | y_{1:t-1}) x_t$ に関して定数

$C_t, \hat{C}_t, m_t, \hat{m}_t$ を漸化式で計算して、 $f(x_t | y_{1:t})$ を求めている。