計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記)

樋口さぶろお[1]　配布: 2019-05-30 Tue 更新: Time-stamp: "2019-06-11 Tue 11:35 JST hig"

初夏のプチテスト (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

時刻, 座標がともに整数値をとるランダムウォークを考える. 時刻 t における座標 $X(t)$ を, 次で定める.

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \qquad P(X(0)=3) = 1.$$

ただし, $R(t)$ は独立同分布

$$P(R(t)=r) = \begin{cases} 1/7 & (r=+2) \\ 2/7 & (r=0) \\ 4/7 & (r=-1) \\ 0 & (\text{他} \end{cases}$$

にしたがう確率変数である.

時刻 t において, ウォーカー座標 x にいる確率を $p(x,t)$ とする.

1. $p(x,t)$ のしたがう漸化式と初期条件を書こう.
2. $p(3,2)$ を求めよう.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507

2

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

ランダムウォークやマルコフ連鎖の実習課題に関する次の5個の文について, 母期待値の計算に関係が深いものに母, 標本期待値による推定に関係が深いものに標, と答えよう.

1. 転置推移確率行列を, 時刻 t について, 繰り返し乗算した (かけた)
2. 座標を, 擬似乱数を使って, 回数 n について繰りかえして出力した
3. ある時刻の分布を表す確率ベクトルからナントカ比率を計算した
4. 横軸 t, 縦軸 x, 折れ線の色の区別 n で座標の時間変化をグラフに描いた
5. 横軸 t, 縦軸 p, 折れ線の色の区別 x で確率の時間変化をグラフに描いた

3

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

状態空間が $S = \{x|x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ であるマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は次で与えられる.

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & b \end{pmatrix}$$

1. 推移図を描こう.
2. 実数 a, b の値を求めよう.
3. $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき, $\vec{p}(1)$ を求めよう.

4

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

状態空間が $S = \{x|x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ であるマルコフ連鎖を考える. 時刻 t に状態 x にある確率を $p(x, t)$ とするとき, $p(x, t)$ の漸化式は, 次で与えられる ($x = 0$ に対してのみ特別な式になっている).

$$p(x, t+1) = \frac{1}{4}p(x, t) + \frac{3}{4}p(x-1, t) \quad (x = 1, 2, 3, 4)$$

ただし

$$p(0, t+1) = \frac{1}{4}p(0, t) + \frac{3}{4}p(4, t) \quad (x = 0)$$

1. マルコフ連鎖の転置推移確率行列を書こう.
2. $p(x, 0) = \begin{cases} 1 & (x = 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ のとき, $p(x, 1)$ を求めよう.

5

状態空間 $S=\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 時刻 t の分布を $\vec{p}(t)$ とする. 転置推移確率行列 M を $M=\frac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix}4&3\\6&7\end{smallmatrix}\right)$ とする. ただし, M の固有値は $\lambda=1,\frac{1}{10}$, 対応する固有ベクトルは $\vec{u}=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)s,\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)s\ (s\neq 0)$ であることを使ってよい.

1. すべての定常分布を答えよう.
2. $\vec{p}(0)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $\vec{p}(t)\ (t\geq 0)$ を求めよう.
3. $\vec{p}(0)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, 極限分布 $\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{p}(t)$ を求めよう.

6

次の転置推移確率行列 M をもつ, 状態空間 $S=\{x|z\in\mathbb{Z},0\leq x\leq 3\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&0&0\\1&5&0&0\\0&0&0&6\\0&0&6&0\end{pmatrix}$$

時間 t において, マルコフ連鎖の定める分布にしたがう確率変数を $X(t)$ とする.

1. 初期分布 $\vec{p}(0)=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$ とする. 母比率 $P(X(0)<\frac{1}{2})$ を求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0)=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$ とする. 母平均値 $\mathrm{E}[X(1)]$ を求めよう.

7

t を時間, x を位置とする. 偏微分方程式 (と境界条件, 初期条件)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=&3\times\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\qquad(t>0,0<x<2\pi)\\u(0,t)=&u(2\pi,t)=7\qquad(t\geq 0)\\u(x,0)=&7\cos(2x)\qquad(0<x<2\pi)\end{aligned}$$

を考える.

これらすべてを満たす解の候補として $u(x,t)=7\mathrm{e}^{-12t}\cos(2x)$ を考えてみた.

1. $u(x,t)$ は偏微分方程式を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.
2. $u(x,t)$ は境界条件を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.
3. $u(x,t)$ は初期条件を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.

8

次のプログラムを実行し, seed を無作為に入力する.

```c
double getuniform(){
  /* 略. rand() を定数倍して[0,1)一様乱数を返す. 授業と同じもの */
}

int getrandom(double y){
  if( y<1/7.0 ){
    return 0;
  }else if( y<2/7.0 ){
    return 1;
  }else{
    return 2;
  }
}

int main(){
  int seed;
  int t,n,tmax=10,nmax=10;
  scanf("%d",&seed);
  A;
  for(n=0;n<nmax;n++){
    B;
    for(t=0;t<tmax;t++){
      C;
      printf("%d ",getrandom(getuniform()));
    }
    printf("\n");
  }
  return 0;
}
```

次の 3 つの場合にそれぞれ, 出力中で縦方向に並んだ 2 個の数が等しい確率 (縦), 横方向に並んだ 2 個の数が等しい確率 (横) をそれぞれ答えよう.

1. A の位置にのみ `srand(seed)` と書いたとき
2. B の位置にのみ `srand(seed)` と書いたとき
3. C の位置にのみ `srand(seed)` と書いたとき

9

過程不要

以下は, $t=0$ に $x=3$ を出発するランダムウォーカーが, 入力された時刻 `tmax` に, $x \geq 2$ にいる母比率の推定値を出力するプログラムである.

空欄 A–E を埋めよう. A–D は 1 行で. E は複数行も可.

```
/* include など略 */
#define TMAX 100

double getuniform();      /* 下では定義省略 */
int getrandom(double y); /* 下では定義省略 */
int phi(int x);

int main(){
  int t,tmax, n,nmax, x, seed;
  int count=0;
  double p;

  scanf("%d",&seed);
  scanf("%d",&tmax);
  scanf("%d",&nmax);
  printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n",seed,tmax,nmax);

  [A];
  for(n=0;n<nmax;n++){
    [B];
    for([C]){
      x=x+getrandom(getuniform());
    }
    count+=phi(x);
  }
  p=[D];
  printf("*p=%f\n",p);
  return 0;
}

int phi(int x){
  [E]
}
```

計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記) 略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2019-05-30 Tue 更新: Time-stamp: "2019-06-11 Tue 11:35 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点　計 100 点.

1

1. $$p(x,t+1)=\frac{1}{7}\times p(x-2,t)+\frac{2}{7}\times p(x,t)+\frac{4}{7}\times p(x+1,t),\quad p(x,9)=\begin{cases}1 & (x=2)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$
2. $p(3,2)=\frac{1}{7}p(1,1)+\frac{2}{7}p(3,1)+\frac{4}{7}p(4,1)=0+\frac{2}{7}(0+\frac{2}{7}p(3,0)+0)+0=\frac{4}{49}$.

2

1. 母
2. 標
3. 母
4. 標
5. 母

3

1. 略
2. 各列は確率ベクトルだから, $a=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. $b=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
3. $\vec{p}(1)=M\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}0\\2/3\\0\\1/3\\0\end{pmatrix}$

4

1. $$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0&\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0&0&0\\ 0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0&0\\ 0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\\ 0&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 507.

2. $M\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/4\\0\\0\\0\\1/4\end{pmatrix}$.
   よって,
$$p(x,1)=\begin{cases}\frac{3}{4} & (x=0)\\ \frac{1}{4} & (x=4)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

5

1. 定常分布は, 固有値 1 の固有ベクトルを定数倍して確率ベクトルにしたものなので, $\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$.
2. $$\vec{p}(t)=a_1\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)1^t+a_2\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{10}\right)^t$$
   で, 初期条件から $a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{2}{3}$ である.
$$\vec{p}(t)=\tfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)+\tfrac{2}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{10}\right)^t$$
3. 上の結果で $t\to+\infty$ とすると, 定常状態 $\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ に収束する.

6

1. $\frac{1}{15}$.
2. $\vec{p}(1)=M\vec{p}(0)=\frac{1}{90}\begin{pmatrix}7\\11\\48\\24\end{pmatrix}$. $\mathrm{E}[X(1)]=\frac{1}{90}(0\cdot7+1\cdot11+2\cdot48+3\cdot24)=\frac{191}{90}$.

7

1. 満たす. 両辺 $=-12u(x,t)$ なので.
2. 満たさない. $u(0,t)=7\mathrm{e}^{-12t}, u(2\pi,t)=7\mathrm{e}^{-12t}$ より.
3. 満たす. $\mathrm{e}^0=1$ より.

8

1. 縦 1 横 1
2. 縦 $(1^2+2^2+4^2)/7^2$, 横 1.
3. 縦 $(1^2+2^2+4^2)/7^2$, 縦 $(1^2+2^2+4^2)/7^2$.

9

A srand(seed)

B x=3

C `t=1;t<=tmax;t++`

D (double)count/nmax

E `if(x>=2){ return 1;} } return 0;`