ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L02(2019-04-11 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2019-04-29 Mon 22:06 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークとは何か説明できる
- C で離散型確率分布にしたがう擬似乱数を生成できる

ここまで来たよ

1. はじめに
   - この授業どんなのり?
2. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数
   - ランダムウォーク
   - 擬似乱数
   - 離散型確率分布にしたがう擬似乱数

科目の目標

もう少し正確にはシラバスを見てね.

- 現象の確率モデルとは何か, 確率過程とは何か, 例をあげて説明できる.
- 確率モデルをオイラー表示とラグランジュ表示で表現し, 量を計算することができる.
- 確率モデルのシミュレーション (まあモンテカルロシミュレーション) のプログラムを作成し, その実行結果から, 表計算ソフトウェア・統計ソフトウェアを用いて統計的推定を行うことができる
- ⋮
- チームで協力して問題を解決できる, 効率よく質問できる, 自分の学習方法を改善できる

どんな人のための科目?

計算科学☆実習 B を履修した方がいい人

- 確率過程 (=時間に依存する確率的現象) を知りたい人
- 微分方程式 (決定論的モデル) が見ていない, 残り半分の世界を確率論的モデルで見たい人
- モデル駆動の研究が見ていない, データ駆動の研究の世界を見たい人
- 偶然性のあるゲームを仕組みからわかって作りたい人
- 確率を, プログラム作成の中で実感したい人
- ランダムアルゴリズムが使えるようになりたい人
- コンピュータでデータの解析ができるようになりたい人

計算科学☆実習 B を履修しない方がいい人

- (単位をとっているかどうかに関わらず) 確率統計☆演習 I, 数値計算法及び実習がぜんぜんわかってない感がある人, この機会にわかろうという決意のない人

科目ののり

難しくありませんが, 注文が多くめんどくさい科目です…
成績計算 科目の成績 100 ピーナッツは

- 25 ピーナッツ:平常点. 毎回授業での quiz, 授業時間外の予習復習.
  - だいたい 10 講義の Quiz ほか
  - だいたい 15 実習時間内の課題提出 TA の現場チェックでなく教員の提出プログラムチェック. TA は間違いの発見に努めますが,「それで OK」とは言いません.
- 40 ピーナッツ:プチテスト群
  - 20 紙のプチテスト
  - 20=5+15 プログラミング実技の非参照非相談プチテスト
- 15 ピーナッツ:プロジェクトとプレゼンテーション (2 回 5+10)
- 20 ピーナッツ:紙のファイナルトライアル (外部記憶あり). 参加必須.
- その他追加ピーナッツ. その時に説明.

ファイナルトライアル時点で 40 点未満の方も, (平均点を上げるために) 本試験に参加をおすすめしますが, 追試験は実施しません.

欠席届 典型的には介護等実習
ピーナッツ的に考慮されたい場合は, 専用用紙に事情を説明する書類を貼って, 授業前後各 5 分に提出 (事前事後とも可. ファイナルトライアルが締切). 何回欠席しても期末試験受験資格を失うことはありませんが, 自分で追いついてね.

チーム活動のある回は, メンバーと樋口に欠席を事前に連絡, 分担を調整

資料授業で配布. 授業後に欲しい人は `http://hig3.net` から各自ダウンロード. 1-503 前のレターボックスに残ってることも.

教科書 前園 概説確率統計. 確率統計☆演習 I(2018)L00 と同じ. 前園確率統計 で言及.

担当者ののり

- なまえ: 樋口さぶろお `hig-compsci @math.ryukoku.ac.jp`
- へや: 1-507 引っ越しました
- オフィスアワー: 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)
- Web ページ: `http://hig3.net`

科目の 1 週間のタイムライン (受講者数によって修正予定)

1. 木 17:00 予習復習問題 (e ラーニング) の一部の回答締切. 何度でも. 最高点.
2. 木 5 講義的 (7-002), Quiz(相談参照あり)
3. このころ実習の課題公開
4. 月 23:55(?) 先週の課題の一部の提出締切
5. 火 15:20 予習復習問題 (e ラーニング) の一部の回答締切.
6. 火 4 実習的 (1-542),
7. 火 23:55 今週の課題の一部の提出締切

実習室に行ったら, `http://hig3.net`→ 計算科学☆実習 B へ.
実習室でやるときイヤフォン必須.

ここまで来たよ

C 言語で数列の計算

数列 $\{X(t)\}$ を定義の例.　　数値計算法

$$\text{漸化式 } X(t) = X(t-1) + R(t) \quad (t = 1, 2, \ldots), \quad \text{初項 } X(0) = a.$$

階差数列の計算と出力

```
int x,r,t;

t=0;
x=a;

printf("%d,%d\n",t,x); /* t=0を特別扱い */
for(t=1;t<=100;t++){
  r=R(t);  /* 階差数列 */
  x=x+r;  /* X(t) を求めた */
  printf("%d,%d\n",t,x);
}
```

`int R(int t){return 3;}` なら $X(t)$ は初項 $\square$ 公差 $\square$ の等差数列.

ランダムウォーク (確率過程の例)

$X(t)$ がランダムウォークの座標

$\Leftrightarrow$ 階差数列 $R(t)$ が独立同分布にしたがう $\boxed{}$

現象の数理 A

例.

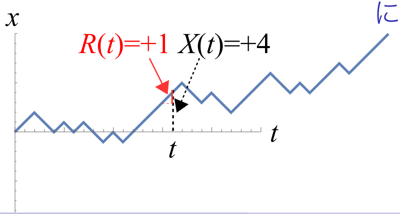
$R(t)$	確率
$+1$	p
-1	$q(=1-p)$

前園確率統計 §2.1 二項分布 $\mathrm{B}(1,p)$

確率統計☆演習 I(2017)L05

https://www.youtube.com/watch?v=l-qIcv7M7pc&t=720s

ランダムウォークってどんなところに出てくる?



- 株価変動
- ブラウン運動
- $\boxed{}$

ここまで来たよ

はじめに

- この授業どんなのり?

1. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数
   - ランダムウォーク
   - 擬似乱数
   - 離散型確率分布にしたがう擬似乱数

離散型確率分布にしたがう擬似乱数列の生成

モンテカルロ法

確率的/決定的な量を計算するのに, 確率変数の標本抽出を実際にコンピュータで **(擬似) 乱数** ((pseudo) random number) を使って行う方法

(擬似) 乱数列

ある確率変数の標本になってる数列=ランダムな数列. サイコロ (やコンピュータや乱数表) を使って作られる.

離散型確率変数 $R(t)$ の擬似乱数列を C 言語で生成しよう.

前園確率統計 §2.1 | 確率統計☆演習 I(2018)L05 | 確率統計☆演習 I(2018)L07

C 言語での乱数の使い方

include <stdlib.h> すると使えるライブラリ関数

```
int rand();/* 0以上RAND_MAX以下の整数を
              同確率 1/(1+RAND_MAX) で返す関数 */
void srand(unsigned seed); /* その初期化. まて次回以降. */
```

次のように定義した関数は, 連続型確率分布 U(0, 1) にしたがう擬似乱数列を返す. 毎回返り値が異なる. 理由後回し.

学習用で '低品質'. Linux, macOS では高品質な drand48() や mt=メルセンヌツイスター

```
double getuniform(){ /* [0,1) 一様擬似乱数 */
  return rand()/(1.0+RAND_MAX);
}
```

典型的使い方

```
int seed=何か;
srand(seed)
for(){
  r=getuniform(); /* 0以上1未満の小数を同じ確からしさで */
}
```

連続型確率変数の復習

前園確率統計 §2.2 確率統計☆演習 I(2018)L08

X: 連続型確率変数の確率分布は, 確率密度関数 $f(x) \geq 0$ で指定される.

確率密度関数から事象の確率を求める

$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[\text{条件}]}(X)]$$

$$P(a \leq X < b) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a \leq X < b]}(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{I}_{[a \leq X < b]}(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$

前園確率統計 §2.2 確率統計☆演習 I(2018)L08

確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$

L02-Q1

Quiz(連続的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率 (一様分布))

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (\frac{5}{2} \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

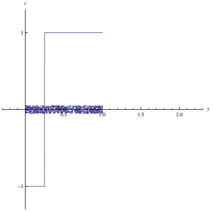
1. 母期待値 $\mathrm{E}[\cos(\pi X)]$ を求めよう.
2. 確率 $P(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8})$ を求めよう.

ある確率で ± 1 を返したい!

離散型確率変数 X.

確率関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x=-1) \\ \frac{3}{4} & (x=+1) \end{cases}$

```
/* 引数yが[0,1)一様乱数なら,
   getrandom の返り値は
   確率1/4で-1, 確率3/4で+1*/
int getrandom(double y){
  if( y< 0.25){
    return -1;
  } else {
    return +1;
  }
}
```




```
r=getrandom(getuniform());
```

ソースコード 1: 擬似乱数

```
/*
rand1.c --  -1 or +1 を確率1/4, 3/4で選ぶ乱数
Time-stamp: "2019-04-16 Tue 18:04 JST hig"
*/
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS // Visual C++用おまじない
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>   /* srand(), rand() を使うのに必要 */

/* 関数プロトタイプ宣言 */
int getuniform();
int getrandom(double y);

int main(){
  int seed;        /* 疑似乱数のシード */
  int n;           /* カウンタ 標本内通し番号*/
  int nmax=100;    /* 疑似乱数を得る回数=サンプルサイズN */

  scanf("%d",&seed);
  srand(seed);          /* シードの設定 */
  for(n=0;n<nmax;t++){ /* 数式とnは1ずれてる*/
    /* srand(seed);  */ /*ここに置くと? */
    printf("%d,%d\n",n,getrandom(getuniform());
  }
  return 0;
}
/** [0,1) 一様疑似乱数を返す */
double getuniform(){
  return rand()/(RAND_MAX+1.0);
}
/** -1 or +1 を確率1/4, 3/4 で返す乱数 */
int getrandom(double y){
  if( y < 0.25 ){
    return -1;
  } else {
    return +1;
  }
}
```

マイいかさまコイン関数を書こう

L02-Q2

Quiz(擬似乱数の使いかた)

引数 y として $[0, 1)$ 一様乱数が与えられたとき，下の確率で値を返す `double getrandom(double y)` を，サンプルプログラムを参考に書こう．

返り値	確率
0.6	0.7
0.4	0.3

ここまで来たよ

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数
   - ランダムウォーク
   - 擬似乱数
   - 離散型確率分布にしたがう擬似乱数

マイいかさま三角エンピツ関数を書こう

L02-Q3

Quiz(離散的な乱数の生成)

離散的確率変数 R の確率分布は次であたえられる.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{2}{8} & (r = 1) \\ \frac{1}{8} & (r = 2) \\ \frac{5}{8} & (r = 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

引数 y として $[0, 1)$ 一様乱数を与えるとき, 上の確率分布に従う乱数 r を返す関数
`int getrandom(double y)` を定義しよう.

動画解説

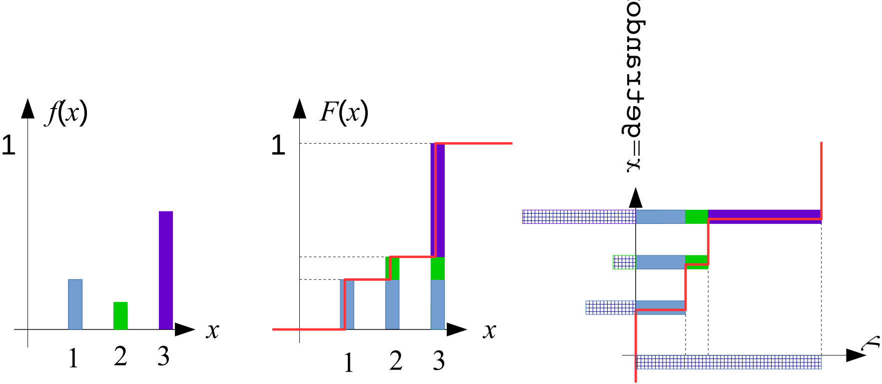
$a \leq y < b$ のとき, 1 を返すとすると, 1 が返される確率は $\int_a^b 1 \, \mathrm{d}x$.
$r = 1, 2, 3$ について a, b をうまく調整していけばいい.

コース後半に自然につながるやり方 (逆関数法) の紹介

長さ 1 を, 棒の長さにあわせて場合分け.

累積分布関数 $F(x) = \sum_{x'=-\infty}^{x} f(x)$

けっきょく, `int getrandom(double y)` は $F(x)$ の逆関数.



L02-Q4

Quiz(期待値)

離散型確率変数 R は, 値 $R=0$ を確率 $2/13$ で, 値 $R=3$ を確率 $4/13$ で, 値 $R=4$ を確率 $7/13$ でとる.
引数 y として $[0,1)$ 一様乱数を与えるとき, 上の確率分布に従う乱数 r を返す関数 `int getrandom(double y)` を定義しよう.

予習復習問題のやり方+今後の予定

Learn Math Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle で登録.

お知らせ

実習室整備状況, 登録者数により未確定です. 当日に My 時間割を確認してください. いずれにせよ, 教科書と (PC につながる) イヤフォン用意してください.

- 2019-04-13 木 5 実習
- Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)