ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L03(2019-04-25 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-04-25 Thu 09:16 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの $X(t)$ の初期条件と漸化式から, 小さい t に対して, 時刻 t に位置 x にいる確率 $p(x,t)$ を計算できる.
- $p(x,t)$ の初期条件と漸化式が書ける.

L02-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. 標本平均値 $\overline{X(3)} = \frac{1}{10}(3+3+\cdots+(-3)) = 1$. よって, 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ は 1 と推定できる.
2. 不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2+\cdots+(-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $\mathrm{E}[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
3. 標本期待値 $\overline{X(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3+\cdots+(-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\mathrm{I}_{[X>1]}(X(3))} = \frac{1}{10}(1+1+1+0+\cdots+0) = \frac{3}{10}$. よって母比率 $p = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X>1]}(X(3))]$ は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

L02-Q2

Quiz 解答:確率シミュレーション

```c
int phi(int x){
  if(x<0){
    return 1;
  }
  return 0;
}
int main(){
  int n,t,x,count,nmax=1000;/*とか*/
  /* scanf, srand 略*/
  count=0;
  for(n=0;n<nmax;n++){
    t=2;x=10;
    for(t=3;t<=20;t++){/*18回移動*/
      x+=getrandom(getuniform());
    }
    count+=phi(x);
  }
  printf("%f\n",(double)count/nmax);
  return 0;
}
```

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークの座標の標本抽出
2. ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
   - ランダムウォークの座標の確率分布
   - 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
   - $p(x,t)$ の初期条件
   - 初期値・漸化式の適用

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \ldots$
$X(t)$: 次で決まる確率変数.

$$\text{初期条件 } X(a) = b \quad (\text{正確には } P(X(a) = b) = 1)$$
$$\text{漸化式 } X(t) = X(t-1) + R(t) \quad (t = a+1, a+2, a+3, \ldots)$$

$R(t)$ が ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, p)$ にしたがうとき

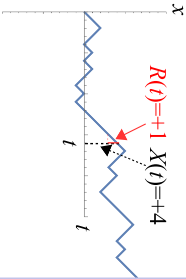
$$\text{確率 } P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

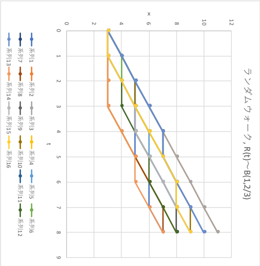
例 $p = \frac{2}{3}$.

日本語で言うと，

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える
- ウォーカーは，時刻 $t = a$ に，$x = b$ から出発する (確率が 1 である)
- ウォーカーは各時刻に，確率 $2/3$ で $+1$ だけ移動し，確率 $1/3$ で移動しない

$X(t)$：時刻 t のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
$(X(0), X(1), X(2), \ldots, X(t))$：経路=パス (path) (を確率変数とみたもの)





$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

L03-Q1

Quiz(ランダムウォークの座標の確率分布)

離散ランダムウォークで, $X(0) = 0$, $X(t) = X(t-1) + R(t)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

とする $(0 < p < 1)$

1. $P(X(2) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(2)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(2)]$ を求めよう.
4. $P(X(2) > 0)$ を求めよう.

cf. 二項分布

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

ここまで来たよ

確率分布 $p(x,t)$ の定義

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に，ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

確率分布 $f(x) = p(x,t)$ (が t の種類だけたくさんある)

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 1$

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に移動し, 確率 $q=1-p$ で x にとどまる.

$\Downarrow$

$X(t) = X(t-1) + R(t)$

$$P(R(t)=r) = \begin{cases} p & (r=1) \\ q = 1-p & (r=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

$\Downarrow$ 確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N = 1000$ 人いるかのように考えよう.

時刻 t に x にいる $N \times p(x,t)$ 人のうち, 時刻 t に, 平均的には

- x から $x+1$ に去るのは, $N \times p(x,t-1) \times p$ 人
- x から移動せず x にとどまるのは $N \times p(x,t-1) \times q$ 人

$X(t)$ の漸化式から $p(x,t)$ の漸化式を導きたい

逆に考えると, 時刻 t に,

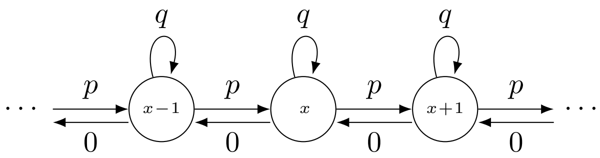
- $x-1$ から, x に来るのは, $\boxed{}$ 人
- x から移動せず x にいるのは, $\boxed{}$ 人

この合計が, t に x にいる人すべて $N \times p(x,t)$.

$$\boxed{}$$

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像, マスター方程式的描像, フォッカープランク方程式的描像



係数は t によらない.

計算で

条件付き確率 確率統計☆演習 II(2018)L01

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=x) =& \sum_y P(X(t)=x|X(t-1)=y)P(X(t-1)=y) \\
=& \cdots + 0 \\
&+ P(X(t)=x|X(t-1)=x-1)P(X(t-1)=x-1) \\
&+ P(X(t)=x|X(t-1)=x)P(X(t-1)=x) + 0 + \cdots \\
=& P(R(t)=1)P(X(t)=x-1) \\
&+ P(R(t+1)=0)P(X(t)=x)
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークの座標の標本抽出
2. ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
   - ランダムウォークの座標の確率分布
   - 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
   - $p(x,t)$ の初期条件
   - 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ の初期条件

運動の初期条件 $\Leftrightarrow$ 数列の初項

具体例で

「時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発した」

$\Downarrow$

$X(t)$ の初期条件から $p(x,t)$ の初期条件を導きたい.

例 1

$t=2$ には $x=3$ にいる →

$X(2)$	$\cdots$	2	3	4	$\cdots$
確率	0	0	1	0	0

→ $p(x,2) =$

例 2

$t=1$ には $x=0,9$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(1)$	$\cdots$	0	$\cdots$	9	$\cdots$
確率	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

→ $p(x,1) =$

L03-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動,
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動,
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない).

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

L03-Q3

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=3$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{8}$ で x から $x+1$ に移動,
確率 $\frac{3}{8}$ で x から $x-2$ に移動,
確率 $\frac{4}{8}$ で x にとどまる.

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解:ランダムウォークの座標の標本抽出

2. ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
   - ランダムウォークの座標の確率分布
   - 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
   - $p(x,t)$ の初期条件
   - 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ を表で表現 I

$t \backslash x$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$	$\cdots$
$\vdots$			$\cdots$				$\cdots$
$t-1$				$p(x-1,t-1)$	$p(x,t-1)$	$p(x+1,t-1)$	
t				$p(x-1,t)$	$p(x,t)$	$p(x+1,t)$	
$\vdots$							

漸化式と初期条件から $p(x,t)$ を計算

L03-Q4

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式)

ランダムウォークの座標の確率分布の漸化式と初期条件を考える.

$$p(x,t)=\frac{2}{3}p(x-1,t-1)+\frac{1}{3}p(x,t-1),\quad p(x,0)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

空いてるセルをうめよう.

$t\backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
1	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
2	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
3	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$											
t										$p(x,t)$	

L03-Q5

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式)

ランダムウォークの座標の確率分布の漸化式と初期条件を考える．

$$p(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{5}p(x-1,t-1) + \frac{4}{5}p(x+1,t-1) & (\text{それ以外}) \\ 0 & (x < -1, x > 6) \end{cases},$$

$$p(x,0) = \begin{cases} 0.5 & (x = 1,3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

空いているセルをを埋めよう．

$t\backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
0										
1										
2										

予習復習問題のやり方+今後の予定

Learn Math Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle で登録.

お知らせ

- Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)